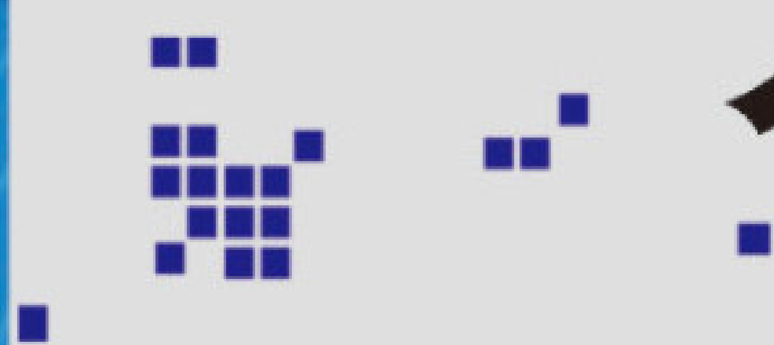
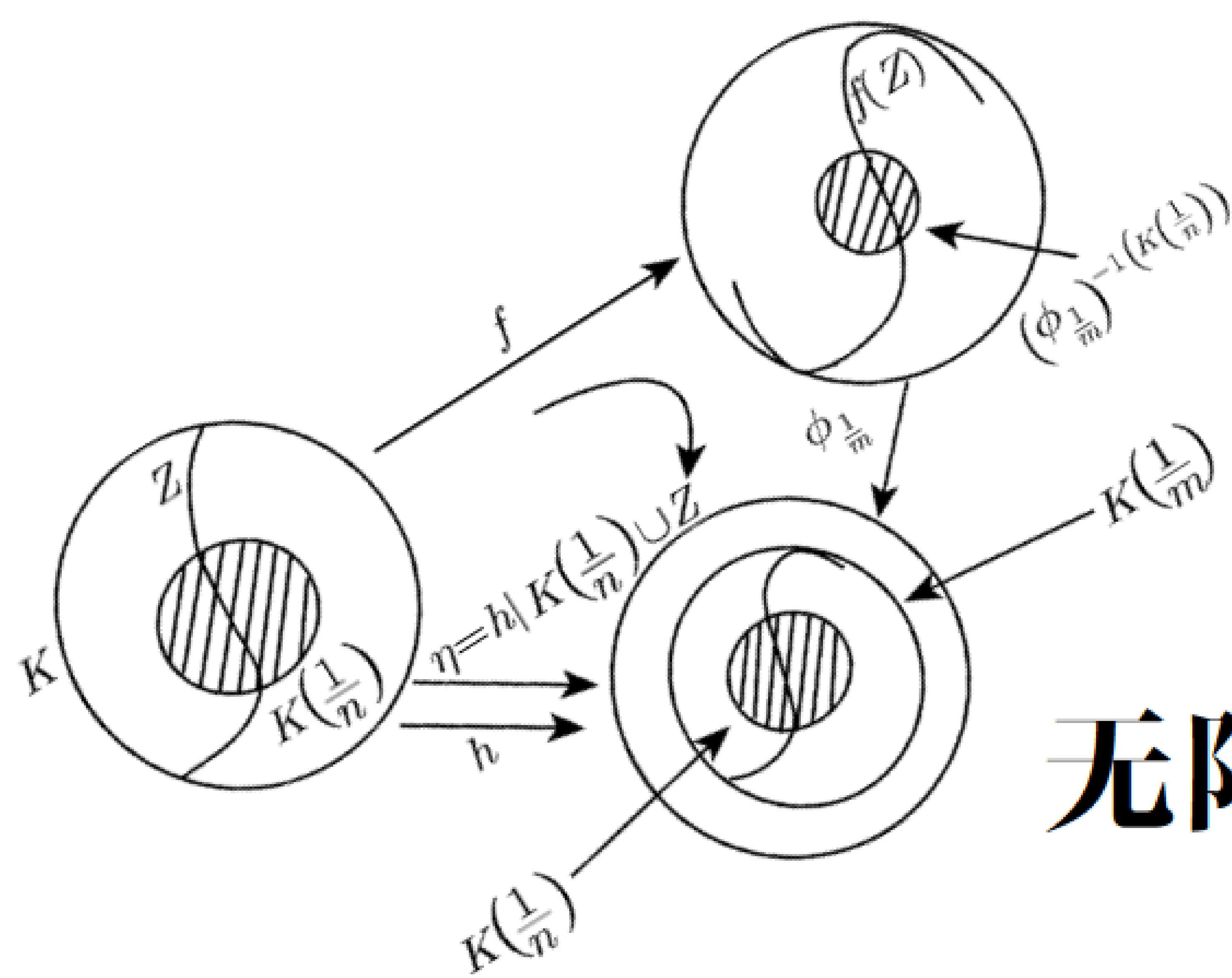
无限维拓扑学引论



杨寒彪 编著

西南交通大学出版社



无限维拓扑学引论

杨寒彪 ◎ 编著

西南交通大学出版社

·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

无限维拓扑学引论／杨寒彪编著．—成都：西南交通大学出版社，2019.8
ISBN 978-7-5643-7068-8

Ⅰ．①无… Ⅱ．①杨… Ⅲ．①无限维－拓扑－研究生－教材 Ⅳ．①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 179086 号

Wuxianwei Tuopuxue Yinlun
无限维拓扑学引论

杨寒彪 **编著**

责任编辑 张宝华
封面设计 何东琳设计工作室

印张 11.25 字数 166千
成品尺寸 170 mm × 230 mm
版次 2019年8月第1版
印次 2019年8月第1次
印刷 四川煤田地质制图印刷厂
书号 ISBN 978-7-5643-7068-8

出版发行 西南交通大学出版社
网址 http://www.xnjdcbs.com
地址 四川省成都市金牛区二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码 610031
发行部电话 028-87600564 028-87600533
定价 56.00元

前　言

本书是为拓扑学专业的硕士研究生和博士研究生提供的关于度量空间和无限维拓扑学学习的学术专著. 相对于国内一般的点集拓扑学著作而言, 本书的重点是度量空间的拓扑学和无限维拓扑学, 这恰好是拓扑学在其他学科的应用中最重要的部分, 同时也满足了在一个相对比较短的篇幅内以比较低的起点给出一些深刻的拓扑学定理的要求. 另外, 本书提供的无限维拓扑学知识在国内出版的专著中较少涉及.

本书由 4 章组成. 第 1 章给出了本书需要的集合论知识. 第 2 章定义了度量空间、连续映射和其他基本概念, 并给出了这些概念的性质, 同时也给出了大量例子. 第 3 章定义了度量空间的连通性. 本书的最后一章给出了无限维拓扑学引论, 其主要目的是证明 Anderson 定理, 即 Hilbert 空间 ℓ^2 同胚于无限可数个实直线的乘积; 为证明这个结果所使用的工具在今天的无限维拓扑学研究中仍然生机勃勃.

本书的绝大多数结论及其证明都来源于一些经典的书籍, 本书作者的主要工作是选择和自认为恰当的陈述. 本书第 1 章主要参考了文献[10]和[20], 第 2 章至第 4 章主要参考了文献[1], [4], [9], [13], [17]. 文献[4]和[11]给出了本书涉及的绝大多数结论的历史, 读者可以参考.

阅读完本书后, 如果你想继续学习拓扑学, 文献[4]给出了关于一般拓扑学经典内容再学习的材料; 文献[11], [12]和[21]是进一步学习无限维拓扑学的很好教材; 文献[13]和[14]是学习代数拓扑学的好教材; 文献[5]给出了维数论的全面陈述. 另外, 本书中包含一些没有给出证明的陈述, 但告知了包含这些证明的文献, 这为读者进一步学习相应内容提供了方便.

本书得到广东省自然科学基金博士启动项目（NO. 2016A030310002）, 国家自然科学基金青年项目（NO.11601393）, 国家自然科学基金面上项目：四元数双曲流形与拟共形映射（NO:11871379）, 国家自然科学基金

面上项目（NO. 11971287），2018 广东省教育厅特色创新项目：四元数双曲流形的几何拓扑特征，2018 广东省普通高校省级重点平台重点科研项目教育科研项目：以 OBE 理念为导向与工科相结合的<线性代数>教材编撰（NO. 2018GXJK192，2018GXJK193）和青年创新人才项目：拓扑指数等其他数学领域在新能源镧系氧化物化学物理性质探索中的应用（NO. 2018KQNCX139）等经费支持.

由于作者学疏才浅，不当和错误之处在所难免，请读者不惜赐教！

杨寒彪[①]

2019 年 4 月 1 日

① 通信地址：广东省江门市五邑大学数学与计算科学学院，529020. E-mail 地址：596283897@qq.com

目　录

第 1 章 公理集合论简述

集合论是现代数学的基础, 本章将给出本书所需要的基本集合论知识. 按照现在的教材体系, 集合论知识在高中数学课本中已经出现, 在大学的各门课程中又得到进一步加深, 特别是“实变函数”教材中给出的基数定义等. 因此, 作为这些课程的后续课程, 我们希望, 本章给出的集合论知识能在此基础上有所提高. 我们选择了一种介于公理化方法和朴素方法之间的方法来介绍集合论知识. 具体而言, 本章没有给出逻辑知识, 尽管, 一般来讲, 公理化集合论需要很强的逻辑知识. 另外, 对于一些如果用公理化方法将会很麻烦的地方, 我们进行了朴素处理. 当然, 我们也兼顾公理化方法和朴素方法, 一方面用公理的方法给出严格的陈述, 另一方面又用朴素的语言给出解释. 关于集合论的系统知识参见文献[8], [10], [20].

读者如果不想学习公理集合论, 也可以简单浏览 1.1 节, 知道本书的一些记号, 然后继续学习 1.2 节至 1.4 节即可. 对于大多数读者已经熟悉的一些集合论知识, 我们放在了练习中, 希望大家认真复习.

1.1 集合论公理

本节将给出集合论公理和一些基本概念. 所谓公理化方法就是用公理(即被认为是正确的论断)给出一些概念的性质. 集合论中两个最重要的不定义概念为: **集合和集合的元素**. 也就是说, 下面的两个论断不需要给出定义:

第一, Z 是一个集合;

第二, 集合 a 是集合 A 的元素, 记作: $a \in A$ 或者 $A \ni a$.

因为读者已经熟悉这两个概念的朴素说明, 在此不再做进一步说明. 本

书中，几乎所有的研究对象都是集合，所以，小写的英文字母 a，b，c 等，大写的英文字母 A，B，C 等，花写的英文字母$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$等，带下标的字母 a_2, B_3，$\mathcal{C}_4$等，希腊字母 α，β，Γ，Δ等都可以表示集合. 注意，“元素”并不是一个集合论概念，更不是一个不定义概念. 所以，可以说，集合 a 是集合 A 的一个元素，但是，不可以说，集合 a 是一个元素！在很多教科书中，为了强调，有时称一个由集合组成的集合为族. 但是，按照一般公理化集合论的观点，所有的集合都是由集合组成的. 本书中，为了和大家的习惯一致，我们有时也称一些集合为族，也就是说，**族**是集合的同义词. 另外，对于个别不是集合的类，我们用多个黑体字母表示，例如，用 **SET** 表示所有集合构成的类.

在本书中，用 $a \notin A$ 或者 $A \not\ni a$ 记 $a \in A$ 不成立，表示 a 不是集合 A 的元素. 以后，我们也用类似的方法表示否定，例如，$3 \nleq 2$，$a \neq b$ 等.

下面用公理给出这两个概念的基本性质，这个公理体系被称为 **Zermelo-Fraenki 选择公理系统**，简记为 **ZFC 系统**.

公理 1.1.1（外延性公理） 对于任意的两个集合 X, Y，$X = Y$ 的充分必要条件是对任意的集合 Z，

$$Z \in X \text{ 当且仅当 } Z \in Y .$$

外延性公理说明，集合是由该集合的元素确定的，这个公理是下面很多集合唯一性的保障. 而下面的公理 1.1.2 至公理 1.1.7，公理 1.1.9 和公理 1.1.10 将保障存在充分多的集合.

公理 1.1.2（空集存在公理） 存在集合 X 使得对于任意的集合 Z，

$$Z \notin X .$$

由外延性公理，满足上面条件的集合 X 是唯一的.

定义 1.1.1 称满足上面公理的唯一集合为**空集**，记为□. 不是空集的其他集合称为**非空集合**.

公理 1.1.3（对集存在公理） 对于任意的两个集合 a，b，存在集合 X 使得对任意的集合 x，

$$x \in X \text{ 当且仅当 } x = a \text{ 或者 } x = b .$$

定义 1.1.2 对于任意的两个集合 a，b，我们称满足上面公理的唯一集

合为由 a, b 组成的**对集**, 记为 $\{a,b\}$. 当 $a=b$ 时, 用 $\{a\}$ 记 $\{a,b\}$, 称 $\{a\}$ 为单点集.

显然, $\{a,b\}=\{b,a\}$. 设 a,b 是集合, 我们使用

$$(a,b) \text{记集合} \{\{a\},\{a,b\}\}.$$

用三次对集存在公理可以知道, 后者确实是一个集合. 称 (a,b) 是由 a,b 组成的**序对集**.

和对集不同, 我们有下面的结论.

定理 1.1.1 对任意的集合 a,b,x,y, $(a,b)=(x,y)$ 当且仅当 $x=a$ 且 $y=b$. 特别地, 当 $a\neq b$ 时, $(a,b)\neq(b,a)$.

证明 显然, 当 $x=a, y=b$ 时, 有 $(a,b)=(x,y)$.

现在假设 $(a,b)=(x,y)$, 即 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{x\},\{x,y\}\}$. 我们考虑下面三种情况来证明 $x=a, y=b$.

情况 A. $\{a\}=\{x\}, \{a,b\}=\{x,y\}$.显然 $a=x$ 成立. 如果 $a=b$, 那么, $y=a=b$. 所以有 $a=x, b=y$ 成立. 如果 $a\neq b$, 那么 $y\neq a$, 否则, $b\notin\{a\}=\{x,y\}$, 与 $b\in\{a,b\}=\{x,y\}$ 矛盾. 所以, $y=b$.

情况 B. $\{a\}=\{x,y\}, \{a,b\}=\{x\}$. 这时, 由第一个等式和定义, 有 $x=a$ 且 $y=a$; 由第二个等式和定义, 有 $a=x$ 且 $b=x$. 所以 $x=a, y=b$ 成立.

情况 C. 否则, 这时, 必然有 $\{a\}=\{x\}=\{x,y\}=\{a,b\}$. 所以, 仿情况 B 可以验证 $x=a, y=b$ 也成立. 证毕.

进一步, 我们可以定义

$$(x_1,x_2,x_3)=((x_1,x_2),x_3);$$
$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=((x_1,x_2,x_3),x_4);$$
$$\cdots\cdots$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})=((x_1,x_2,\cdots,x_n),x_{n+1}).$$

公式是一个逻辑学概念, 简单叙述如下.

首先是**原始公式**, 即下面的两类公式:

(1) $x=y$;

(2) $x\in y$.

其次, **命题连接词**包括

非：$\neg p$，**且**：$p \wedge q$，**或**：$p \vee q$，**蕴含**：$p \to q$，**等价**：$p \Leftrightarrow q$.

量词包括

任意量词：$\forall x \ \phi$，**存在量词**：$\exists x \ \phi$.

而**公式**就是原始公式经过有限次命题连接词和量词复合所能得到的全体.

如果一个变量 x 出现在一个公式 ϕ 中且在 x 的前面没有量词 $\forall x$ 和 $\exists x$，则称 x 为公式 ϕ 的**自由变量**. 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是公式 ϕ 的全部自由变量，我们记这个公式为 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 不含自由变量的公式称为**句子**.

在公理化集合论发展早期，人们曾认为对任意的公式 $\phi(x)$，

$$\{x : \phi(x)\}$$

是集合. 但著名的 **Russell 悖论**否定了这种想法. 事实上，假定如此，那么

$$Z = \{x : x \notin x\}$$

是一个集合. 但容易看到，这时，$Z \in Z$ 当且仅当 $Z \notin Z$. 矛盾!

对任意的公式 $\phi(x, p_1, \cdots, p_n)$，称

$$\{x : \phi(x, p_1, \cdots, p_n)\}$$

为一个**可由变量** $p_1, \cdots, p_n$ **定义的类**. 如果 ϕ 仅含一个自由变量 x，那么，上面的类称为可定义的类.

集合一定是类. 事实上，设 A 是一个集合，那么，

$$A = \{x : x \in A\}.$$

所以，A 是类. 但是，Russell 悖论说明类不一定是集合. 用 **SET** 表示所有集合构成的类，后面的正则性公理将显示它不是集合. 我们需要下面的公理.

公理 1.1.4（分离性公理） 设 X 是集合，$\phi(x,u)$ 是一个公式，那么对任意的 u，存在集合 Y 使得对任意的集合 x，

$$x \in Y \text{ 当且仅当 } (x \in X) \wedge \phi(x,u).$$

显然，满足上面条件的集合 Y 是唯一的，记作

$$\{x \in X : \phi(x,u)\}.$$

关于分离性公理，有很多推论.

定理 1.1.2 对任意的非空集合 X, 存在唯一集合 Y 使得对任意的集合 y,

$$y\in Y \text{ 当且仅当对任意的 } x\in X \text{, 有 } y\in x.$$

证明 因为 X 不是空集, 所以存在 $x_0\in X$. 那么,

$$Y=\{y\in x_0:\forall x\ \ (x\in X)\to(y\in x)\}.$$

注意到,

$$\phi(x):\forall x\ \ (x\in X)\to(y\in x)$$

是一个公式. 因此, 由分离性公理, Y 是一个集合. 显然, Y 是我们需要的集合.

唯一性由外延性公理立即得到. 证毕.

定义 1.1.3 满足上面定理的唯一集合 Y 称为集合 X 的**交**, 记作

$$\bigcap X \text{ 或者 } \bigcap_{x\in X} x.$$

当 $X=\{x_1,x_2\}$ 时, 我们用 $x_1\cap x_2$ 代替 $\bigcap X$. 当 $x_1\cap x_2=\varnothing$ 时, 我们说集合 x_1,x_2 **不相交**; 当 $x_1\cap x_2\neq\varnothing$ 时, 我们说集合 x_1,x_2 **相交**.

注 1.1.1 我们不能证明空集的交存在! 所以, 以后谈到集合的交时一般指非空集合的交. 但在特定的情况下, 我们可以专门定义空集的交.

定理 1.1.3 对任意的集合 X, Y, 存在唯一的集合 Z 使得对任意的集合 z,

$$z\in Z \text{ 当且仅当 } z\in X \text{ 但 } z\notin Y.$$

证明 显然,

$$Z=\{z\in X:z\notin Y\}=\{z\in X:\neg(z\in Y)\}$$

满足要求. 由外延性公理, 满足上面定理的集合 Z 由集合 X, Y 确定. 证毕.

定义 1.1.4 满足上面定理的唯一集合 Z 称为集合 X 与集合 Y 的**差**, 记作

$$X\setminus Y.$$

但由分离性公理并不能得到并集的存在性, 我们需要另一个公理.

公理 1.1.5 (并集存在公理) 对任意的集合 X, 存在集合 Y 使得对任意的集合 y,

$$y\in Y \text{ 当且仅当存在 } x\in X \text{ 使得 } y\in x.$$

由外延性公理, 满足上面公理的集合 Y 由集合 X 确定.

定义 1.1.5 我们称满足上面公理的唯一集合 Y 为集合 X 的并, 记作

$$\bigcup X \text{ 或者 } \bigcup_{x\in X} x.$$

显然, $\bigcup\varnothing=\varnothing$. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 是集合, 令

$$\{x_1,x_2,x_3\}=\bigcup\{\{x_1,x_2\},\{x_3\}\};$$

$$\cdots\cdots$$

$$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}\}=\bigcup\{\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\{x_{n+1}\}\}.$$

通常, 用

$$x_1\cup x_2\cup\cdots\cup x_n \text{ 或者 } \bigcup_{i=1}^{n} x_i \text{ 代替 } \bigcup\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

那么,

$$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup\cdots\cup\{x_n\}.$$

也许你会认为, 我们不需要对集存在公理而用 $\{x_1\}\cup\{x_2\}$ 定义 $\{x_1,x_2\}$ 即可保障对集 $\{x_1,x_2\}$ 的存在性. 但, 事实上是不对的, 因为没有对集存在公理, 对于集合 x, $\{x\}$ 将不能按照上面的方式定义.

同样, 我们用

$$x_1\cap x_2\cap\cdots\cap x_n \text{ 或者 } \bigcap_{i=1}^{n} x_i \text{ 代替 } \bigcap\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

下面将给出幂集公理. 为此, 我们需要一个定义.

定义 1.1.6 设 X, Y 是集合, 如果对任意的集合 x, 由 $x\in X$ 可以推出 $x\in Y$, 则称 X 是 Y 的**子集**或者 X **包含于** Y 或者 Y **包含** X, 记作 $X\subset Y$ 或者 $Y\supset X$. 否则, 记为 $X\not\subset Y$ 或者 $Y\not\supset X$. 如果 $X\subset Y$ 且存在集合 $y\in Y$ 使得 $y\notin X$, 则说 X 是 Y 的**真子集**, 记作 $X\subsetneq Y$.①

下面是幂集公理.

公理 1.1.6（幂集公理） 对任意的集合 X, 存在集合 Y 使得对任意的集合 Z,

$$Z\in Y \text{ 当且仅当 } Z\subset X.$$

① 有的教科书中用 $X\subseteq Y$ 表示X是Y的子集, 用 $X\subset Y$ 表示X是Y的真子集.

定义 1.1.7 我们把满足上面条件的集合 Y 称为集合 X 的幂集，它由 X 唯一确定，记为 $P(X)$.

幂集公理是说，集合的子集的全体是集合.

利用幂集公理，我们可以定义集合的乘积. 对于集合 X, Y, 可能你知道，$X\times Y$ 应该是由所有的序对集 (x,y) 组成，这里，$x\in X, y\in Y$. 但，问题是 $X\times Y$ 为什么是一个集合？我们需要幂集公理. 首先，对任意的 $x\in X, y\in Y$，按定义，$\{x,y\}\subset X\bigcup Y$. 因此，$\{x,y\}\in P(X\bigcup Y)$. 同理，$\{x\}\in P(X)\subset P(X\bigcup Y)$. 所以

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}\in P(P(X\bigcup Y)).$$

再应用分离性公理，可以知道

$$X\times Y=\{(x,y)\in P(P(X\bigcup Y)):x\in X,y\in Y\}$$

是集合.

定义 1.1.8 设 X, Y 是集合，称集合 $X\times Y$ 为集合 X, Y 的 **Cartesian 乘积**，简称为**乘积**. 同样，我们可以定义有限乘积. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是集合，

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_1\in X_1,x_2\in X_2,\cdots,x_n\in X_n\}$$

被称为集合 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**乘积**.

特别地，当 $X_1=X_2=\cdots=X_n=X$ 时，我们用 X^n 表示上面的集合. 同时，为了方便，我们约定 $X^0=\{\varnothing\}$.

定义 1.1.9 设 X, Y 是集合，$X\times Y$ 中的任何子集 R 被称为由 X 到 Y 的**一个关系**. 令

$$\mathrm{dom}(R)=\{x\in X:\text{存在 } y\in Y \text{使得 } (x,y)\in R\},$$

$$\mathrm{ran}(R)=\{y\in Y:\text{存在 } x\in X \text{使得 } (x,y)\in R\}.$$

显然，dom(R), ran(R)分别是集合 X, Y 的子集，分别称为关于 R 的**定义域**和**值域**.

如果由 X 到 Y 的关系 f 满足下面的条件，则称 f 为一个由 X 到 Y 的**映射**：

（1） $\mathrm{dom}(f)=X$；

(2) 对任意的$x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, 如果$(x, y_1), (x, y_2) \in f$, 那么, $y_1 = y_2$.

显然, 如果 f 是由 X 到 Y 的映射, 那么, 对任意的$x \in X$, 存在唯一的$y \in Y$使得$(x, y) \in f$. 我们用 $f(x)$来记这个唯一的 y, 称之为在 f 下 x 的**像**. 用

$$f: X \to Y$$

表示 f 是由 X 到 Y 的映射. 用Y^X表示由 X 到 Y 的映射全体, Y^X是一个集合, 见练习 1.1.E. 为了方便, 我们约定, $Y^{\varnothing} = \{\varnothing\}$.

可以仿照上面定义来定义由类到类的映射.

公理 1.1.7 (替换公理) 对任意的集合 X 和任意的类 Y, 如果$f: X \to Y$是映射, 那么 $\mathrm{ran}(f)$ 是集合.

上面的替换公理通俗地来讲就是, 集合的像是集合. 它是不可缺少的. 下面的正则公理保证了不会存在"畸形"集合.

公理 1.1.8 (正则公理) 不存在集合$x_1, x_2, \cdots, x_n$使得

$$x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1.$$

设 x 是一个集合, 我们称集合

$$x + 1 = x \cup \{x\}$$

为集合 x 的**后继集合**. 进一步, 定义

$$x + 2 = (x + 1) + 1, x + 3 = (x + 2) + 1, \cdots.$$

由正则公理得如下定理.

定理 1.1.4 对任意的集合 x 和自然数 $n \neq 0$, 有 $x + n \neq x$.

到目前为止, 我们的公理不能保证"无限集"的存在性, 所以, 需要无限集公理.

公理 1.1.9 (无限集公理) 存在集合 X 使得

$$\varnothing \in X, \text{对任意的 } x \in X, \text{有 } x + 1 \in X.$$

这个公理好像与无限集无关, 但后面在严格定义了无限集后将证明满足这个条件的集合必然是无限的. 一般来说, 称上面的公理体系为 **Zermelo-Fraenki 系统**, 简记为 **ZF 系统**. 最后, 引入一个饱受争议的公理,

以完成 ZFC 系统的公理陈述.

公理 1.1.10（选择公理） 设 X 是集合且 $\varnothing \notin X$，那么，存在映射 $f: X \to \bigcup X$ 使得对任意的 $x \in X$，有

$$f(x) \in x.$$

注意，对于 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是有限集的特殊情况，选择公理中的结论可以由前面的公理得到. 选择公理之所以饱受争议是因为凡必须用选择公理才能证明的结论，其证明都不是很自然. 但是，如果没有选择公理，很多我们熟悉的数学结论将不再成立. 对于一般拓扑学，选择公理也是不可缺少的. 关于选择公理的进一步讨论，我们将在 1.4 节给出.

练 习 1.1

1.1.A. 设 X_1, X_2 是非空集合，证明：

$$\bigcup X_1 \cup \bigcup X_2 = \bigcup (X_1 \cup X_2); \ \bigcap X_1 \cap \bigcap X_2 = \bigcap (X_1 \cap X_2).$$

1.1.B. 设 A, B, C 是集合. 证明：

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

(2) $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$；

(3) $A \cap \varnothing = \varnothing, A \cup \varnothing = A$；

(4) $A \subset B$ 当且仅当 $A \cap B = A$ 当且仅当 $A \cup B = B$；

(5) $A = B$ 当且仅当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$.

1.1.C. 设 A，B 是集合. 证明：

$$A \cap \bigcup B = \bigcup_{b \in B} (A \cap b), \ A \cup \bigcap B = \bigcap_{b \in B} (A \cup b).$$

1.1.D. 设 A，B 是集合. 证明：

$$A \setminus \bigcup B = \bigcup_{b \in B} (A \setminus b), \ A \setminus \bigcap B = \bigcap_{b \in B} (A \setminus b).$$

上面两个公式被称为 **de Morgan 对偶律**.

1.1.E. 设 X, Y 是集合, 证明 Y^X 是集合.

1.2 集合上的几种特殊关系

上一节, 我们已经定义了集合上的关系和一种特殊的关系—— 映射, 本节, 我们将再定义三种特殊的关系: 等价关系、偏序关系和良序关系. 之后, 我们将研究这四种关系的基本性质.

映射对我们来说是非常重要的概念, 下面给出一些基本的概念和符号.

设 X, Y 是集合, $f: X \to Y$ 是映射. 对任意的 $A \subset X, B \subset Y$, 定义

$$f(A) = \{f(a) \in Y : a \in A\};\ f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

当 $B = \{b\}$ 是单点集时, 可以用

$$f^{-1}(b) \text{ 代替 } f^{-1}(\{b\}).$$

由分离性公理, $f(A)$, $f^{-1}(B)$ 分别是 Y, X 的子集, 分别称为在 f 下集合 A 的**像**和在 f 下集合 B 的**逆像**.

注意到, 在这个定义下, $f: P(X) \to P(Y)$ 和 $f^{-1}: P(Y) \to P(X)$ 是两个映射. 这样, 我们使用了同一个记号 f 来表示两个不同的映射, 但一般不会由此引起混淆, 如果有必要, 可以用 $f: X \to Y$ 和 $f: P(X) \to P(Y)$ 区别它们.

如果

$$f(X) = \mathrm{ran}(f) = Y,$$

则称 f 是**满射**.

如果对任意的 $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \neq x_2 \text{ 能推出 } f(x_1) \neq f(x_2),$$

则称 f 是**单射**.

如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 是**双射**或者**一一对应**. 当 f 是一一对应时, 可以定义

$$f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in f\}.$$

容易验证，$f^{-1}: Y \to X$ 是一个映射而且也是一一对应.

设 X,Y,Z 是集合，$f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是映射. 定义

$$g \circ f = \{(x,z) \in X \times Z : \exists y (y \in Y) \wedge (f(x) = y) \wedge (g(y) = z)\}.$$

那么，$g \circ f$ 是 X 到 Z 的映射，称为映射 f 和 g 的**复合**.

设 $f: X \to Y$ 是一个映射，$A \subset X$，定义

$$f \mid A = f \bigcap (A \times Y).$$

那么，$f \mid A : A \to Y$ 是一个映射，称为映射 f 在 A 上的**限制**.

对任意的集合 X,

$$\mathrm{id}_X = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$$

是 X 到 X 的映射，称为 X 上的**恒等映射**. 如果没有混淆，恒等映射也记为 $\mathrm{id}: X \to X$.

对任意的集合 X, Y 和 $c \in Y$，我们定义映射

$$\{(x,c) \in X \times Y : x \in X\}$$

为**常值映射**. 这个常值映射一般也记作 $c: X \to Y$.

我们熟悉的映射 $f: X \to Y$ 的定义是：对任意的 $x \in X$，指定了唯一的 $y = f(x) \in Y$ 与之对应. 我们的定义和这个定义在本质上是一样的，只不过我们的定义比较严格，这里的定义比较方便，或者具体来说，我们的定义就是这个定义的严格化. 一般来说，我们会给出映射的记号，例如，f, ϕ 等. 但是，有时为了简单，我们可能不引入需要定义的映射的记号，而用下面的方法给出由 X 到 Y 的映射：对任意的 $x \in X$，有唯一确定的 y 与之对应，那么，我们用

$$x \mapsto y$$

定义这个映射. 例如，对任意的集合 X,

$$x \mapsto (x,x)$$

建立了一个由 X 到 $X \times X$ 的映射.

关于像和逆像的运算性质，大家可能已经很熟悉，我们把它们放在本节的练习中，请大家认真复习.

设 I, X 是集合，$\phi: I \to X$ 是满射. 如果，对任意的 $i \in I$，我们用 x_i 记 $\phi(i)$，那么，

$$X = \{\phi(i) : i \in I\} = \{x_i : i \in I\}.$$

这时，我们说 $\{x_i : i \in I\}$ 是集合 X 的**一个指标化**，I 被称为**指标集**，映射 ϕ 被称为**指标映射**. 指标化经常被用来表示集合的交、并等. 例如，这时，

$$\bigcup X = \bigcup_{i \in I} x_i,\quad \bigcap X = \bigcap_{i \in I} x_i.$$

后面，当设 $X = \{x_i : i \in I\}$ 时，就意味着对集合 X 的一个指标化. 显然，任何一个集合都能够指标化，而且如果必要，我们能进一步要求指标映射是一一对应的.

设 X 是集合，R 是 X 到 X 的关系，即 $R \subset X \times X$，这时，我们称 R 是 X 上的**关系**. 下面，定义 X 上的关系的几种性质.

自反关系： 如果对任意的 $x \in X$，有 $(x,x) \in R$.

对称关系： 对任意的 $x, y \in X$，如果 $(x,y) \in R$，则 $(y,x) \in R$.

反对称关系： 对任意的 $x, y \in X$，如果 $(x,y) \in R$ 且 $(y,x) \in R$，则 $x = y$.

传递关系： 对任意的 $x, y, z \in X$，如果 $(x,y) \in R$ 且 $(y,z) \in R$，则 $(x,z) \in R$.

定义 1.2.1 设 X 是集合，R 是 X 到 X 的关系. 如果 R 满足自反关系、对称关系和传递关系，则称 R 为 X 上的**等价关系**. 一般地，我们使用~记等价关系，$(x,y) \in \sim$ 一般被记为 $x \sim y$. 如果~是 X 上的等价关系，对任意的 $x \in X$，令

$$[x]_\sim = [x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

上面记号的意思是，如果没有混淆，我们将使用 $[x]$ 记这个集合，如果可能有混淆，将使用 $[x]_\sim$ 记这个集合.

定理 1.2.1 如果~是 X 上的等价关系，则对任意的 $x, y \in X$，有

(1) $[x] = [y]$ 或者 $[x] \cap [y] = \varnothing$；

(2) $\bigcup_{x \in X} [x] = X$.

证明留给读者.

注意到，对任意的 $x \in X$，有 $[x] \in P(X)$. 因此

$$[X]=\{[x]\in P(X):x\in X\}$$

是 $P(X)$ 的一个子集，称为 X 在等价关系~下的**商集合**. 进一步，我们定义一个映射 $q:X\to[X]$ 为

$$q(x)=[x],$$

称其为在等价关系~下的**自然映射**.

设 X, S 是一个集合，$\phi:S\to P(X)$ 是一个单射，如果 ϕ 满足下面的条件：

（1）对任意的 $s_1,s_2\in S$，如果 $s_1\neq s_2$，则 $\phi(s_1)\bigcap\phi(s_2)=\varnothing$；

（2）$\bigcup_{s\in S}\phi(s)=X$，

则称 ϕ 是集合 X 的一个分划.

定理 1.2.2 设 X 是集合.

（1）如果~是 X 上的等价关系，由公式 $\phi(\sim)([x])=[x]$ 定义的映射 $\phi(\sim):[X]\to P(X)$ 建立了集合 X 的一个分划；

（2）如果 $\phi:S\to P(X)$ 是集合 X 的一个分划，我们定义 X 上的一个关系 $\sim(\phi)$ 为

$$\sim(\phi)=\{(x,y)\in X\times X:\phi(x)=\phi(y)\},$$

那么，$\sim(\phi)$ 是 X 上的等价关系；

（3）对 X 上任意的等价关系~和任意的分划 ϕ，有

$$\phi(\sim(\phi))=\phi,\ \sim(\phi(\sim))=\sim.$$

证明留给读者.

由定理 1.2.2 知，集合 X 上的等价关系和分划在本质上是一样的.

集合上另一个重要的关系是偏序关系.

定义 1.2.2 设 X 是一个集合，R 是 X 上的一个关系. 如果 R 是自反的、反对称的、传递的，则称 R 是 X 上的**偏序关系**.

一般地，我们用 $\leqslant$ 记偏序关系，这时，$(x,y)\in\leqslant$ 将被记为 $x\leqslant y$ 或者 $y\geqslant x$. 我们称序对 $(X,\leqslant)$ 为**偏序集**.

下面给出偏序集中一些基本的定义和性质，这些性质的证明都是显然的，请读者一试.

设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集, $A\subset X, x_0\in X$. 如果对任意的 $a\in A$, 有

$$a\leqslant x_0,$$

则称 x_0 是 A 的一个**上界**. 进一步, 如果 $x_0\in A$, 则称 x_0 是 A 的**最大元**.

偏序集的子集不一定有上界, 更不一定有最大元!上界可能也有很多, 但是, 最大元最多有一个. 如果 A 有最大元的话, 我们用 $\max A$ 表示之.

设 $A\subset X, x_0\in A$. 如果对任意的 $a\in A$,

$$a\geqslant x_0 \text{ 能推出 } a=x_0,$$

则称 x_0 是 A 的一个**极大元**.

当然, 极大元未必存在, 存在的话也未必唯一. 如果 A 有最大元, 则这个最大元是 A 的唯一的极大元. 但, 相反的不成立, 即 A 存在唯一的极大元, 这个极大元未必是 A 的最大元.

如果 $\leqslant$ 是 X 上的偏序关系, 那么

$$\preceq=\{(x,y)\in X\times X: y\leqslant x\}$$

也是 X 上的偏序关系, 称为偏序关系 $\leqslant$ 的**反偏序关系**.

如果 x_0 是集合 A 在偏序集 $(X,\preceq)$ 中的上界（最大元, 极大元）, 则称 x_0 是集合 A 在偏序集 $(X,\leqslant)$ 中的**下界（最小元, 极小元）**. 集合 A 的最小元用 $\min A$ 表示.

对于偏序集 $(X,\leqslant)$ 的子集 A, 用 $U(A)$ 表示 A 的上界的集合. 如果 $U(A)$ 存在最小元 x_0, 则称 x_0 为 A 的**上确界**.

同理, 可以定义**下确界**.

A 的上（下）确界若存在, 则唯一, 我们用 $\sup A$ （$\inf A$）记之. 当然, 集合的上（下）确界未必存在. 如果 A 存在最大（小）元 x_0, 那么, x_0 是 A 的上（下）确界. 如果 $A=X$, 那么, 在上面的各种概念中, 我们一般省略 A. 例如, X 的最大元被简称为最大元.

例 1.2.1 设 X 是集合, 那么 $(P(X),\subset)$ 是偏序集, 这里,

$$\subset=\{(A,B)\in P(X)\times P(X): A\subset B\}.$$

对任意的 $\mathcal{A}\subset P(X)$, $\bigcup\mathcal{A}$ 和 $\bigcap\mathcal{A}$ 分别是 $\mathcal{A}$ 的上确界和下确界. X 和□分别是 $P(X)$ 的最大元和最小元. 但是, 对一般的子集 $\mathcal{A}$, 未必存在最大（小）元, 甚至极大（小）元. 如果 X 至少含两个元素, 令

$$\mathcal{A}=P(X)\setminus\{X\}.$$

那么, 对任意的 $x\in X$, $X\setminus\{x\}\in\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的极大元但不是 $\mathcal{A}$ 的最大元, 也不是它的上确界.

设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集, $A\subset X$. 那么,

$$\leqslant_A=\leqslant\bigcap(A\times A)$$

是集合 A 上的偏序关系, 因此, $(A,\leqslant_A)$ 是偏序集, 称为 $(X,\leqslant)$ 的**子偏序集**. 为了简单, 我们经常写 $\leqslant_A$ 为 $\leqslant$.

定义 1.2.3 设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集. 如果偏序关系 $\leqslant$ 还满足下面的条件:

全序条件: 对任意的 $x,y\in X$, $x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$ 之一成立,

则称 $\leqslant$ 为 X 上的**全序关系**, 称 $(X,\leqslant)$ 为**全序集**或者**线性序集**或者**链**.

在全序集中, 极大（小）元就是最大（小）元.

最后, 我们引入良序集的概念.

定义 1.2.4 设 $(X,\leqslant)$ 是全序集, 如果还满足下面的条件:

良序条件: 对 X 的任意非空子集 A, A 有最小元成立,

则称 $(X,\leqslant)$ 为**良序集**, 称 $\leqslant$ 为 X 上的**良序关系**.

现在一般认为, 集合论是数学的基础, 甚至, 人们熟悉的自然数也可以在集合论中得到定义. 我们称满足无限集公理的集合为**归纳集**.

定理 1.2.3 存在最小的归纳集, 即存在归纳集 ω 使得对任意的归纳集 X, 有 $\omega\subset X$.

证明 由无限集公理, 设 X_0 是一个归纳集. 令

$$\mathcal{A}=\{A\in P(X_0):A\text{ 是归纳集}\}.$$

那么, $X_0\in\mathcal{A}$, 于是, $\mathcal{A}$ 非空. 令

$$\omega=\bigcap\mathcal{A}.$$

下面的事实表明 ω 是最小的归纳集:

事实 1. ω 是归纳集. 由定义很容易验证.

事实 2. 对任意的归纳集 X, 有 $\omega \subset X$. 设 X 是归纳集, 那么, 容易验证, $X \cap X_0 \in \mathcal{A}$. 所以

$$\omega \subset X_0 \cap X \subset X .$$

证毕.

由归纳集定义,

$$0 = \varnothing \in \omega ,$$

$$1 = 0 + 1 = \{\varnothing\} = \{0\} \in \omega ,$$

$$2 = 1 + 1 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \in \omega ,$$

$$\cdots\cdots$$

我们称这些集合为**自然数**. 显然, 集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ 是归纳集, 所以, 由 ω 的最小性知

$$\omega = \{0,1,2,\cdots\} .$$

称 ω 为**自然数集**.

对于集合 A, B, 我们用

$$A \underline{\in} B \text{ 表示 } A \in B \text{ 或者 } A = B .$$

可以证明下面的定理[①]

定理 1.2.4 (1) 对任意的自然数 n, $(n, \underline{\in})$ 是良序集;

(2) $(\omega, \underline{\in})$ 是良序集;

(3) 对任意的自然数 $n, m \in \omega$, 如果 $n \in m$, 那么, $n \subset m$;

(4) 对任意的 $n \in \omega$, 有 $n \subset \omega$.

进一步, 可以定义 ω 上的四则运算, 并证明其满足人们已熟悉的性质. 由此, 可定义有理数、实数等, 在此省略定义过程. 下面仅仅给出相应的记号:

非 0 自然数: ¥ $= \omega \setminus \{0\} = \{1,2,\cdots\}$;

整数集: ¢;

有理数集: ¤;

无理数集: ℙ;

实数集: ¡.

---

① 为了避免过分繁琐, 这里不给出大家熟悉的结论的证明.

当然可以像通常那样定义这些集合上的四则运算及线性序关系 $\leqslant$ 等. 即对任意的 $a,b\in\mathbb{R}$，如果 $a\leqslant b$，令

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\leqslant x\leqslant b\};$$

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\};$$

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\leqslant x<b\};$$

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\leqslant b\}.$$

也可以定义

$$[a,+\infty),(-\infty,b)$$

等集合，统称为**区间**. 其中，$[a,b]$ **称为闭区间；** $(a,b),(-\infty,b),(a,+\infty),(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ 称为**开区间；** $[a,b),(b,a],(-\infty,b],[a,\infty)$ 称为**半开半闭区间**. 当 $a=b$ 时，$[a,b]=\{a\}$ 称为**退化的区间**，而 $(a,b)=[a,b)=(a,b]=\varnothing$ 不再称为区间. 特别地，

$$\mathbf{I}=[0,1],\ \mathbf{J}=[-1,1],\mathbb{R}^{+}=[0,+\infty).$$

我们引入良序集的目的是使用它做归纳法，包括归纳证明和归纳定义. 在良序集 $(W,\leqslant)$ 中，对任意的 $x,y\in W$，我们用 $x<y$ 表示 $x\leqslant y$ 但是 $x\neq y$. 令

$$W(x_0)=\{x\in W:x<x_0\},$$

称其为 W 对 x_0 的**前截**.

定理 1.2.5 设 $(W,\leqslant)$ 是良序集，对任意的 $x\in W$，$P(x)$ 是一个关于 x 的命题. 如果对任意的 $x_0\in W$，假设对任意的 $x\in W(x_0)$，$P(x)$ 成立，则 $P(x_0)$ 成立，那么对任意的 $x\in W$，有 $P(x)$ 成立.

证明 反设存在 $x\in W$ 使得 $P(x)$ 不成立，那么，集合

$$A=\{x\in W:P(x)\text{不成立}\}$$

是 W 的非空子集，因此，存在最小元 $x_0\in A$. 从而，对任意的 $x<x_0$，$P(x)$ 成立. 由条件，这时有 $P(x_0)$ 成立，与 $x_0\in A$ 矛盾. 证毕.

注 1.2.1 你可能疑惑为什么没有假定 P 对 $(W,\leqslant)$ 中的最小元成立. 事实上，如果 x_0 是 $(W,\leqslant)$ 的最小元，那么，$W(x_0)=\varnothing$. 所以，



$$\text{对任意的 } x \in W(x_0), P(x) \text{ 成立.}$$

因此，$P(x_0)$ 成立. 这样，由定理的假定可以推出 P 对 $(W,\leqslant)$ 中的最小元成立.

用同样的方法可以证明下面的归纳定义、定理.

定理 1.2.6 设 $(W,\leqslant)$ 是良序集，Y 是一个集合，$\Phi:\mathcal{F}\to Y$ 是一个映射，这里

$$\mathcal{F}=\bigcup\{Y^A : A\subset W\}.$$

那么存在唯一的映射 $\phi:W\to Y$ 满足下面的条件，对任意的 $x_0\in W$

$$\phi(x_0)=\Phi(\phi\,|\,W(x_0)).$$

因为自然数 $(n,\underline{\in})$ 和 $(\omega,\underline{\in})$ 是良序集，而且，按照我们的定义，在这些集合中，$\underline{\in}$ 就是 $\leqslant$，所以上面的两个定理对它们都有效，这就是普通的有限归纳法和数学归纳法. 对于其他的良序集，这个方法称为**超限归纳法**.

练 习 1.2

1.2.A. 设 $f:X\to Y$ 是映射，$\{A_i : i\in I\}\subset P(X)$，$\{B_j : j\in j\}\subset P(Y)$，$A\subset X$，$B\subset Y$. 证明：

（1） $f(\bigcup\{A_i : i\in I\})=\bigcup\{f(A_i) : i\in I\}$；

（2） $f^{-1}(\bigcup\{B_j : j\in j\})=\bigcup\{f^{-1}(B_j) : j\in j\}$；

（3） $f^{-1}(\bigcap\{B_j : j\in j\})=\bigcap\{f^{-1}(B_j) : j\in j\}$；

（4） $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$；

（5） 举例说明 $f(\bigcap\{A_i : i\in I\})=\bigcap\{f(A_i) : i\in I\}$ 和 $f(X\setminus A)=Y\setminus f(A)$ 可以不成立，并探讨它们成立的条件.

1.2.B. 设 $f:X\to Y$ 是映射且 $X\neq\varnothing$，证明：

（1） f 是单射的充分必要条件是存在映射 $g:Y\to X$ 使得 $g\circ f=\mathrm{id}_X$；

（2） f 是满射的充分必要条件是存在映射 $g:Y\to X$ 使得 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$；

（3） f 是双射的充分必要条件是存在映射 $g:Y\to X$ 使得 $g\circ f=\mathrm{id}_X$ 且

$f\circ g=\mathrm{id}_Y$, 这时, $g=f^{-1}$.

1.2.C. 证明单射的复合是单射, 满射的复合是满射, 一一对应的复合是一一对应.

1.2.D. 设 $f:X\to Y$ 是满射. 证明:

$$\sim=\{(x_1,x_2)\in X\times X: f(x_1)=f(x_2)\}$$

是 X 上的等价关系, 并建立一个一一对应 $g:[X]\to Y$.

1.2.E. 设 $(P,\leqslant)$ 是偏序集且含最大元 $\top$ 和最小元 $\bot$. 证明论断:

$$\text{对任意的}\ \varnothing\neq A\subset P, \sup A\ \text{存在}$$

和论断:

$$\text{对任意的}\ \varnothing\neq B\subset P, \inf B\ \text{存在}$$

等价.

1.2.F. 设 $n\in\omega$, 由定义证明 $n=\varnothing$ 或者存在 $k\in\omega$ 使得 $n=k+1$.

1.3 序数与基数

本节将定义序数和基数, 并给出它们的基本性质.

1.3.1 序数

为了定义序数, 我们先给出良序集的更进一步的性质. 设 $(P,\leqslant)$ 和 $(Q,\leqslant)$ 是两个偏序集, $f:P\to Q$ 是映射. 如果对任意的 $x_1,x_2\in P$,

$$x_1\leqslant x_2\ \text{能推出}\ f(x_1)\leqslant f(x_2),$$

则称 f 是偏序集 $(P,\leqslant)$ 到偏序集 $(Q,\leqslant)$ 的**保序映射**. 如果进一步, f 是一一对应且 f^{-1} 也是保序映射, 则称 f 是偏序集 $(P,\leqslant)$ 到偏序集 $(Q,\leqslant)$ 的**同构**, 称 $(P,\leqslant)$ 和 $(Q,\leqslant)$ **同构**. 如果 $(P,\leqslant)$ 和 $(Q,\leqslant)$ 是线性序集, 它们之间的保序

映射也称为**递增的**. 如果映射 $f:P\to Q$ 满足

$$x_1\leqslant x_2 \text{ 能推出 } f(x_1)\geqslant f(x_2),$$

则称 f 是**递减的**. 如果, 我们用 $<$ 代替 $\leqslant$, 用 $>$ 代替 $\geqslant$, 可以定义**严格递增映射**和**严格递减映射**.

引理 1.3.1 设 $(W,\leqslant)$ 是良序集, $f:W\to W$ 是严格递增的, 那么, 对任意的 $x\in W$, 有 $f(x)\geqslant x$.

证明 假设结论不成立, 设

$$X=\{x\in W:f(x)<x\}$$

是 W 的非空集, 因此, 存在 X 的最小元 x_0, 使得 $z=f(x_0)<x_0$. 由于 f 是严格递增的, 所以, $f(z)<z$. 矛盾于 x_0 的最小性. 证毕.

推论 1.3.1 对任意的良序集 W, 恒等映射是 W 到 W 的唯一同构.

证明 设 $f:W\to W$ 是同构, 那么 $f^{-1}:W\to W$ 也是同构. 因此, 对任意的 $x\in W$,

$$f(x)\geqslant x \text{ 且 } f^{-1}(x)\geqslant x.$$

所以, $f(x)=x$. 证毕.

推论 1.3.2 两个良序集之间的同构是唯一的.

推论 1.3.3 良序集不能同构于它自己的任何前截.

现在, 给出下面重要的定理.

定理 1.3.1 对任意的两个良序集 W_1, W_2, 下面三个结论中恰好有一个成立:

(1) W_1 同构于 W_2 的一个前截;

(2) W_2 同构于 W_1 的一个前截;

(3) W_1 同构于 W_2.

证明 令

$$R=\{(x,y)\in W_1\times W_2:W_1(x) \text{ 和 } W_2(y) \text{ 同构}\},$$

那么 R 是 W_1 到 W_2 的一个关系. 利用推论 1.3.3 很容易证明, 对任意的 $x\in \mathrm{dom}(R)$, 存在唯一的 $y\in W_2$ 使得 $(x,y)\in R$; 对任意的 $y\in \mathrm{ran}(R)$, 存在唯一的 $x\in W_1$ 使得 $(x,y)\in R$. 假设 $\mathrm{dom}(R)\neq W_1$ 且 $\mathrm{ran}(R)\neq W_2$, 令 x_0 是

$W_1 \setminus \mathrm{dom}(R)$ 的最小元, y_0 是 $W_2 \setminus \mathrm{ran}(R)$ 的最小元, 那么, 不难验证

$$\mathrm{dom}(R) = W_1(x_0), \mathrm{ran}(R) = W_2(y_0),$$

而且 R 是 $W_1(x_0)$ 到 $W_2(y_0)$ 的同构. 由此说明 $(x_0, y_0) \in R$. 矛盾. 所以, 下面三种情况必有一个成立:

情况 A. $\mathrm{dom}(R) = W_1$, $\mathrm{ran}(R) \neq W_2$. 这时, R 建立了 W_1 与 W_2 的一个前截 $W_2(y_0)$ 的同构, (1) 成立.

情况 B. $\mathrm{dom}(R) \neq W_1$, $\mathrm{ran}(R) = W_2$. 这时, R 建立了 W_1 的一个前截 $W_1(x_0)$ 与 W_2 的同构, (2) 成立.

情况 C. $\mathrm{dom}(R) = W_1$, $\mathrm{ran}(R) = W_2$. 这时, R 建立了 W_1 与 W_2 的同构, (3) 成立.

最后, 再次利用推论 1.3.3 知上面三种情况只能有一个成立. 证毕.

这样, 对任意的两个良序集, 它们或者同构或者一个同构于另一个的一个前截. 所谓序数是希望在同构的良序集所构成的类中选择出一个良序集作为这个类的代表. 从本质上讲, 选择哪一个都没有区别, 但我们可以选择得好一点使其还满足:

如果一个代表同构于另一个代表的前截, 则前者就是后者的一个前截.

于是, 我们引入下面的定义.

定义 1.3.1 设 α 是一个集合, 如果下面条件成立, 则称 α 是一个**序数**:

(1) $(\alpha, \underline{\in})$ 是良序集;

(2) 如果 $x \in \alpha$, 那么 $x \subset \alpha$.

当我们说序数 α 是良序集时, 是指 $(\alpha, \underline{\in})$ 是良序集. 下面的定理说明这样定义的序数满足我们的要求.

定理 1.3.2 (1) 如果 α 是序数且 $\beta \in \alpha$, 那么, $\beta = \alpha(\beta)$;

(2) 如果 α 是序数且 $\beta \in \alpha$, 那么, β 也是序数;

(3) 对任何两个不同序数, 必有一个是另一个的前截, 从而它们不同构;

(4) 对任意由序数构成的非空集合 A, $\bigcap A$ 和 $\bigcup A$ 都是序数, 而且 $\bigcap A \in A$;

(5) 如果 α 是序数, 那么, $\alpha + 1$ 也是序数;

(6) 任意的良序集必同构于某一个序数.

证明 （1） 由序数的定义（2）知 $\beta\subset\alpha$.因此，由定义，

$$\alpha(\beta)=\{x\in\alpha:x\in\beta\}=\alpha\cap\beta=\beta.$$

（2） 由于良序集的子集也是良序集，所以 β 满足序数的定义（1）. 现在，设 $x\in\beta$，那么，由（1）知

$$x=\alpha(x)\subset\alpha(\beta)=\beta.$$

（3） 设 α,β 是两个不同的序数，不妨设 $\alpha\setminus\beta\neq\varnothing$，那么，$\alpha\setminus\beta$ 在 $(\alpha,\underline{\in})$ 中存在最小元 x. 下面仅仅需要证明 $\beta=\alpha(x)$.

首先，由 x 的定义知 $\alpha(x)\subset\beta$. 如果 $\beta\not\subset\alpha(x)$，设 y 是 $\beta\setminus\alpha(x)$ 的最小元，那么，$\beta(y)\subset\alpha(x)$. 又，对任意的 $z\in\alpha(x)$，有 $z\in\beta$，所以

$$y\in z,\ y=z,\ z\in y$$

之一成立. 如果前两者之一成立，那么，由定义和（1），（2）知 $y\in\alpha(x)$. 矛盾！所以，$z\in y=\beta(y)$. 这样

$$x=\alpha(x)=\beta(y)=y\in\beta.$$

而此矛盾于 $x\in\alpha\setminus\beta$. 所以，$\beta=\alpha(x)$.

（4） 利用（1），（2），（3）和定义容易验证，留给读者.

（5） 由定义立即得到.

（6） 设 W 是良序集. 令

$$A=\{x\in W:W(x)\text{同构于一个序数}\},$$

建立映射 F，对任意的 $a\in A$，定义 $F(a)$ 是一个序数使得 $F(a)$ 同构于 $W(a)$. 由（3）知 $F(a)$ 是唯一的. 由替换公理知 $F(A)$ 是一个集合. 由推论 1.3.2，令 $\phi_a:W(a)\to F(a)$ 是唯一的同构. 可以验证，对任意的 $a,b\in A$，如果 $a<b$，那么

$$\phi_b\,|\,W(a)=\phi_a. \tag{1-3-1}$$

从而，由（4）知 $\bigcup F(A)=\alpha$ 也是序数. 进一步，利用式（1-3-1）容易验证，$\phi=\bigcup_{a\in A}\phi_a$ 是 $\bigcup_{a\in A}W(a)$ 到 α 的同构.

如果$\bigcup\limits_{a\in A}W(a)=W$，我们完成了定理的证明.

如果$\bigcup\limits_{a\in A}W(a)\neq W$，那么，存在最小的$x\in W\setminus\bigcup\limits_{a\in A}W(a)$. 则

$$W(x)=\bigcup_{a\in A}W(a)$$

且$\phi:W(x)\to\alpha$是同构. 又显然,

$$\phi\cup\{(x,\alpha)\}:W(x)\cup\{x\}\to\alpha+1$$

是同构. 所以，如果$W(x)\cup\{x\}=W$，那么，我们完成了证明. 如果$W(x)\cup\{x\}\neq W$，选择y是非空集合$W\setminus(W(x)\cup\{x\})$的最小元，那么，$W(y)=W(x)\cup\{x\}$，且由上面知，$W(y)$同构于$\alpha+1$. 所以$x\in W(y)\subset\bigcup\limits_{a\in A}W(a)$. 矛盾于$x$的选择. 所以，$W(x)\cup\{x\}\neq W$的情况不会出现. 证毕.

对于序数α,β，如果α是β的前截，我们说α小于β，用$\alpha<\beta$或者$\beta>\alpha$表示. 那么，对任意的两个序数α,β，下面的关系刚好有一个成立：

$$\alpha<\beta,\alpha=\beta,\alpha>\beta\ .$$

这个性质被称为**序数的三歧性**. 我们用$\alpha\leqslant\beta$表示$\alpha<\beta$或者$\alpha=\beta$. 同理，可以定义$\alpha\geqslant\beta$.

由定理 1.2.4 知，对任意的自然数n，n是序数且ω也是序数. 设α是序数，如果存在序数β使得$\alpha=\beta+1$，则称α是**后继序数**. 这时称α是β的**后继序数**，β是α的**前继序数**. 非 0 非后继的序数称为**极限序数**. ¥ 中的元素都是后继序数，ω是极限序数.

设α是序数，可以定义：

$$\alpha+0=\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2=(\alpha+1)+1,\cdots.$$

我们用 **ORD** 表示所有序数的类，那么，在 **ORD** 上，$\leqslant$满足良序关系的所有要求. 由于 **ORD** 不是集合，所以$(\mathbf{ORD},\leqslant)$不是良序集，但是，我们仍然可以在$(\mathbf{ORD},\leqslant)$上用超限归纳法来证明一个命题对任意的序数成立或者定义从 **ORD** 到一个集合的映射. 我们写出 **ORD** 前面的一些元素：

$$0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,$$

$$\omega+\omega=\{0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots\},\omega+\omega+1,\cdots.$$

设 W 是良序集, 我们用 $\overline{W}$ 表示和 W 同构的序数, 称之为 W 的**序型**. 下面的结果很有用, 证明留给读者.

定理 1.3.3 设 α 是序数, 不存在严格递减的映射 $f:\omega\to\alpha$.

推论 1.3.4 对任意的序数 α, 存在唯一的极限序数 α_0 和 $n\in\omega$ 使得 $\alpha=\alpha_0+n$. 如果 n 是偶数（奇数）, 则称 α 为**偶序数（奇序数）**.

1.3.2 基 数

现在, 我们定义基数, 开始本节的第二部分.

定义 1.3.2 设 m 是一个序数, 如果对任意的序数 α,

$$\alpha<m \text{ 能推出不存在一一对应 } f:\alpha\to m,$$

则称 m 是**基数**. 也就是说, 基数是能建立一一对应的序数中最小的序数.

设 A 是集合, m 是一个基数, 如果 A 和 m 之间存在一一对应, 则说 A 的**基数**是 m, 用 $|A|$ 表示 A 的基数. 对任意的集合 A, B, 如果 $|A|=|B|$, 那么, A 和 B 之间存在一一对应.

是否每一个集合都有基数是一个非常有意义的问题. 显然, 每一个序数都有基数. 事实上, 设 α 是一个序数, 那么集合

$$A=\{\beta\in\alpha+1:\beta\text{和}\alpha\text{之间存在一一对应}\}$$

是序数 $\alpha+1$ 的非空子集, 因为 $\alpha\in A$. 因此, $m=\min A$ 存在. 显然, m 是基数且 $|\alpha|=m$. 由下一节的定理 1.4.1 和上面的论断显然可以推出每一个集合都有基数这个事实. 现在, 我们先承认这个事实. 由此, 对任意的集合 A, B, $|A|=|B|$ 的充分必要条件是 A 和 B 之间存在一一对应. 由序数的三歧性, 对于任意的集合 A, B,

$$|A|<|B|,|A|=|B|,|B|<|A|$$

恰好有一个成立. 我们称之为**基数的三歧性**. 对于给定的集合 A, B, 判断哪

一个成立对我们来说都是一件非常有意义的工作.

定理 1.3.4 对任意的非空集合 A, B, 下面的论断等价:

(1) $|A|\leqslant|B|$;

(2) 存在单射 $f:A\to B$;

(3) 存在满射 $g:B\to A$.

证明 设 $\phi:A\to|A|$ 和 $\psi:B\to|B|$ 是一一对应.

(1) ⇒ (2). 因为 $|A|\leqslant|B|$, 所以, $|A|\subset|B|$. 于是, $f(a)=\psi^{-1}(\phi(a))$ 定义了一个由 A 到 B 的单射 (见练习 1.2.C).

(2) ⇒ (3). 设 $f:A\to B$ 是单射. 选择 $a_0\in A$. 定义

$$g=\{(b,a)\in B\times A:(a,b)\in f\}\cup\{(b,a_0)\in B\times A:b\notin \operatorname{ran}(f)\}.$$

那么, 容易验证 $g:B\to A$ 是满射.

(3) ⇒ (1). 设 $g:B\to A$ 是满射. 对任意的 $\xi\in|A|$, $\phi^{-1}(\xi)\in A$. 因为 $g:B\to A$ 是满射, 存在 $b\in B$ 使得 $g(b)=\phi^{-1}(\xi)$. 于是, 存在 $\eta\in|B|$ 使得 $\psi^{-1}(\eta)=b$. 因此, 令

$$\lambda(\xi)=\min\{\eta\in|B|:\phi^{-1}(\xi)=g(\psi^{-1}(\eta))\}.$$

容易验证, $\lambda:|A|\to|B|$ 是单射. 令

$$W=\lambda(|A|).$$

那么, λ 给出了 $|A|$ 到 W 的一一对应. 由基数的定义和练习 1.3.A 知

$$A|\leqslant\overline{W}\leqslant|B|.$$

(1) 成立. 证毕.

推论 1.3.5 对任意的非空集合 A, B, 下面的论断等价:

(1) $|A|=|B|$;

(2) 存在单射 $f:A\to B$ 和单射 $g:B\to A$;

(3) 存在满射 $f:A\to B$ 和满射 $g:B\to A$;

(4) 存在满射 $f:A\to B$ 和单射 $g:A\to B$.

上面推论中 (1) 和 (2) 的等价性被称为 **Cantor-Bernstein 定理**.

下面的定理表明不存在最大的基数.

定理 1.3.5 对任意的集合 A，有 $|A|<|P(A)|$.

证明 显然，映射 $a\mapsto\{a\}$ 建立了 A 到 $P(A)$ 的单射，所以 $|A|\leqslant|P(A)|$. 现在假设 $f:A\to P(A)$ 是满射. 令

$$B=\{a\in A:a\notin f(a)\}.$$

那么，$B\in P(A)$，于是，存在 $b\in A$ 使得 $f(b)=B$. 但是，由 B 的定义知，$b\in B$ 当且仅当 $b\notin B$. 矛盾. 所以，不存在从 A 到 $P(A)$ 的满射.从而，$|A|<|P(A)|$. 证毕.

对于基数 m，我们用 2^m 记 $P(m)$ 的基数. 上面的定理说明，对任意的基数 m，$m<2^m$.

由基数的定义可以看出，$0,1,2,\cdots,\omega$ 是基数，这些基数被称为**可数基数**. 其中，$0,1,2,\cdots$ 被称为**有限基数**，ω 被称为**可数无限基数**. 设 α 是一个序数，如果 $|\alpha|\leqslant\omega$，则称 α 是一个**可数序数**. $\omega+1,\omega+\omega$ 是可数序数. 事实上，

$$f(\omega)=0,\ \ f(n)=n+1$$

建立了 $\omega+1$ 到 ω 的一一对应；

$$g(n)=2n,\quad g(\omega+n)=2n+1,\quad n\in\omega$$

建立了 $\omega+\omega$ 到 ω 的一一对应. 由下一节的定理 1.4.1 知，存在 $P(\omega)$ 上的一个良序关系 $\leqslant$. 令

$$\alpha=\overline{(P(\omega),\leqslant)}>\omega,$$

$$\omega_1=\min\{\beta\in\alpha+1:|\beta|>\omega\}.$$

也就是说，ω_1 是第一个不可数序数，当然，也是第一个不可数基数. 从而由序数的定义知，作为集合，ω_1 由所有可数序数组成. 利用同样的方法，可定义第三个无限基数 ω_2，第四个无限基数 ω_3，等等. 不难证明

$$\omega_\omega=\bigcup_{n\in\omega}\omega_n$$

也是一个基数，它是大于所有 ω_n 的最小基数. 所有基数的全体不是集合，用

CAR 表示这个类.

定义 1.3.3 设 A 是一个集合, 如果存在 $n \in \omega$ 使得 $|A| = n$, 则称 A 是**有限集**, 否则称 A 是**无限集**. 如果 $|A| \leqslant \omega$, 则称 A 是一个**可数集合**. 如果, $|A| = \omega$, 则称 A 是一个**可数无限集合**.

判断一个集合是不是可数无限集合对我们特别重要, 现在给出下面的定理.

定理 1.3.6 对任意的可数无限集合 A, B, 有

(1) $A \cup B$ 是可数无限集合;

(2) $A \times B$ 是可数无限集合.

证明 设 $f:\omega \to A$ 和 $g:\omega \to B$ 是一一对应. 显然, (1), (2) 中的两个集合的基数都不小于 ω. 下面利用定理 1.3.4 分别证明它们都不大于 ω.

(1) 定义 $h:\omega \to A \cup B$ 为

$$h(n) = \begin{cases} f(k), & \text{如果} n = 2k, \\ g(k), & \text{如果} n = 2k+1. \end{cases}$$

那么, h 是 ω 到 $A \cup B$ 的满射 (但不一定是单射), 由定理 1.3.4 知, $|A \cup B| \leqslant \omega$. 也就是说, 如果 $A = \{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$, 那么,

$$A \cup B = \{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\}.$$

(2) 同 (1), 如果 $A = \{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$, 那么,

$$A \times B = \{(a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_1, b_0), (a_0, b_2), (a_1, b_1), (a_2, b_0), \cdots\}.$$

证毕.

推论 1.3.6 (1) 如果 A 是可数的且对任意的 $a \in A$, a 也是可数的, 那么, $\bigcup A$ 是可数的;

(2) 如果对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, A_i 是可数的, 那么 $\prod_{i=1}^{n} A_i$ 是可数的;

(3) 如果 A 是可数的, 那么,

$$\mathrm{Fin}(A) = \{B \in P(A) : |B| < \omega\}$$

是可数的.

证明 (1) 设 $f:\omega\to A$ 是满射, 对任意的 $a\in A$, 令 $g_a:\omega\to a$ 也是满射. 定义 $h:\omega\times\omega\to\bigcup A$ 为

$$h(n,m)=g_{f(n)}(m).$$

那么, h 是满射. 又由定理 1.3.6 (2) 知, $|\omega\times\omega|=\omega$, 所以 A 是可数的.

(2) 使用数学归纳法, 应用定理 1.3.6 (2) 立即可得.

(3) 对任意的 $n\in\omega$, 令

$$\mathrm{Fin}_n(A)=\{B\in P(A):|B|\leqslant n\}.$$

那么
$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mapsto\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

定义了 A^n 到 $\mathrm{Fin}_n(A)$ 的满射, 所以, 由定理 1.3.4 和本定理的 (2) 知

$$|\mathrm{Fin}_n(A)|\leqslant|A^n|\leqslant\omega.$$

再利用本定理的 (1) , 有

$$|\mathrm{Fin}(A)|=\left|\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{Fin}_n(A)\right|\leqslant\omega.$$

证毕.

推论 1.3.7 (1) 非 0 自然数集 $\mathbb{N}$, 整数集 $\mathbb{Z}$, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 都是可数无限集;

(2) $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q}^2$ 都是可数无限集;

(3) 无理数集 $\mathbb{P}$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 都不是可数集, 且 $|\mathbb{P}|=|\mathbb{R}|$;

(4) $|\mathbb{R}|=|P(\mathbb{N})|$.

证明 (1) $\mathbb{N}=\omega\setminus\{0\}$ 显然是可数的.

由于 $n\mapsto -n$ 建立了 $\mathbb{N}$ 到集合 $-\mathbb{N}=\{-1,-2,\cdots\}$ 的一一对应, 所以, $-\mathbb{N}$ 也是可数的, 所以 $\mathbb{Z}=\omega\bigcup(-\mathbb{N})$ 是可数的.

定义映射 $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ 为

$$f(n,m)=\frac{n}{m},$$

那么, f 是满射. 由此知, $\mathbb{Q}$ 是可数的.

(2) 由 (1) 和定理 1.3.6 立即可得.

(3) 为了证明 $\mathbb{R}$ 不是可数的, 仅仅证明它的子集 $\mathbf{I}=[0,1]$ 不是可数的即可.

反设

$$\mathbf{I}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

是可数的. 假设, 对任意的 n,

$$a_n=0.\,i_n^{(1)}i_n^{(2)}\cdots i_n^{(m)}\cdots$$

是 a_n 的十进位小数表示, 这里, $0=0.000\cdots, 1=0.999\cdots$. 现在, 对任意的 m, 令

$$i^{(m)}=\begin{cases}9, & \text{如果 } i_m^{(m)}\in\{0,1,2,3,4\},\\ 0, & \text{如果 } i_m^{(m)}\in\{5,6,7,8,9\}.\end{cases}$$

那么
$$x=0.\,i^{(1)}i^{(2)}\cdots i^{(m)}\cdots\in\mathbf{I}.$$

但是, 对任意的 n, 我们有 $x\neq a_n$, 矛盾于 $\mathbf{I}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. 所以, $\mathbf{I}$ 不是可数的, 由此说明 $\mathbb{R}$ 不是可数的.

现在, 建立 $\mathbb{P}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一一对应. 事实上, 设

$$\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}.$$

定义 $f:\mathbb{P}\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}+r_{\frac{n}{2}}, & \text{如果 } x=\sqrt{2}+r_n \text{ 且 } n \text{ 是偶数},\\ r_{\frac{n+1}{2}}, & \text{如果} x=\sqrt{2}+r_n \text{ 且 } n \text{ 是奇数},\\ x, & \text{否则}.\end{cases}$$

则 f 是一一对应的.

(4) 注意 $10=\{0,1,2,\cdots,9\}$, 令

$$F=\{f\in 10^{\mathbb{N}}: \text{存在} N\in\mathbb{N} \text{ 使得对任意的} n>N, f(n)=9\}.$$

那么, 很容易验证 $|F|=\omega|$. 于是, 利用和上面证明 $|\mathbb{P}|=|\mathbb{R}|$ 相同的方法可以证明

$$|10^{\mathbb{N}}\setminus F|=|10^{\mathbb{N}}|.$$

对任意的 $f\in 10^{\mathbb{N}}\setminus F$, 令

$$\phi(f) = 0.f(1)f(2)\cdots f(n)\cdots \in \mathbf{I}.$$

那么，$\phi: 10^{\mathbb{N}} \setminus F \to [0,1)$ 是一一对应．所以

$$|10^{\mathbb{N}}| = |10^{\mathbb{N}} \setminus F| = |[0,1)| = |\mathbf{I}|,$$

上面公式中最后一个等号见练习 1.3.D．最后，利用练习 1.3.E（2），（3），有 $|P(\mathbb{N})| = |\mathbf{I}|$．

$|\mathbb{R}| = |\mathbf{I}|$ 的证明留给读者．证毕．

基数 $|\mathbb{R}| = |\mathbf{I}|$ 被称为**连续统基数**，用 c 表示，即 $c = 2^{\omega}$．**连续统假设**是

$$c = \omega_1.$$

也即 I 的基数是最小的不可数基数．连续统假设是否成立是集合论的创立人 Cantor 提出的，Hilbert 把它作为 20 世纪要解决的 23 个最重要的数学问题之首．20 世纪 70 年代，人们证明了连续统假设在 ZFC 系统中既不能被证明也不能被否定．更一般地，有所谓的广义连续统假设：

对任意的无限基数 m，2^m 是比 m 大的最小基数．

同样，广义连续统假设在 ZFC 系统中既不能被证明也不能被否定，这个结果也说明了 ZFC 系统不是完备的．

练 习 1.3

1.3.A．设 α 是序数，$W \subset \alpha$．证明 $\overline{W} \leqslant \alpha$．举例说明，对于 α 真子集 W，$\overline{W} = \alpha$ 有可能成立．

1.3.B．直接证明 Cantor-Bernstein 定理．

1.3.C．证明集合 A 是无限集的充分必要条件是存在 A 的真子集 B 使得 $|A| = |B|$．

1.3.D．证明：$|(0,1)| = |[0,1)| = |\mathbf{I}|$．

1.3.E．（1）证明：对任意的集合 A，B，C，有 $|C^{A\times B}| = |C^{A^B}|$．

（2）注意到 $2 = \{0,1\}$．证明任意的集合 A，有 $|2^A| = |P(A)|$．

（3）证明：$|2^{\mathbb{N}}| = |10^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$．

1.4 选择公理

本节将给出选择公理的几个等价命题. 这里所谓等价是指, 在 ZF 系统中, 它们可以和选择公理互相推出. 但是, 我们并不准备证明这些, 仅仅证明这些命题是 ZFC 系统中的定理, 也即在 ZF 系统中它们可由选择公理推出. 另外, 本节将定义集合的任意乘积.

定理 1.4.1 (良序公理) 任意的集合上都存在良序关系.

证明 设 A 是集合. 因为空集上显然存在良序关系, 我们假定 $A\neq\varnothing$. 令

$$B=P(A)\setminus\{\varnothing\}.$$

那么, 由选择公理存在映射 $g:B\to\bigcup B$, 使得对任意的 $b\in B$, 有 $g(b)\in b\subset A$. 令

$$\mathcal{F}=\bigcup\{A^W:W\subset\mathbf{ORD}\text{ 且 }W\text{ 是集合}\}.$$

定义 $\Phi:\mathcal{F}\to A+1$ 为: 对任意的 $f\in\mathcal{F}$,

$$\Phi(f)=\begin{cases}g(A\setminus\mathrm{ran}(f)), & \text{如果 } A\setminus\mathrm{ran}(f)\neq\varnothing,\\ A, & \text{如果 } A\setminus\mathrm{ran}(f)=\varnothing.\end{cases}$$

那么, 由定理 1.2.6, 存在唯一的映射 $\phi:\mathbf{ORD}\to A+1$ 使得对任意的 $\alpha\in\mathbf{ORD}$,

$$\phi(\alpha)=\Phi(\phi\,|\,\alpha).$$

注意, $\mathbf{ORD}(\alpha)=\alpha$. 对任意的 $\alpha<\beta\in\mathbf{ORD}$, 如果 $\phi(\alpha)$, $\phi(\beta)$ 都不等于 A, 那么,

$$\phi(\beta)=\Phi(\phi\,|\,\beta)=g(A\setminus\mathrm{ran}(\phi\,|\,\beta))\in A\setminus\mathrm{ran}(\phi\,|\,\beta)\not\ni\phi(\alpha).$$

所以, $\phi(\beta)\neq\phi(\alpha)$. 因此, 如果对任意的 $\alpha\in\mathbf{ORD}$, 都有 $\phi(\alpha)$ 不等于 A, 那么, ϕ 是 $\mathbf{ORD}$ 到集合 A 的单射, 这矛盾于 $\mathbf{ORD}$ 不是集合. 所以, 存在 $\alpha\in\mathbf{ORD}$ 使得 $\phi(\alpha)=A$. 那么, $A\setminus\mathrm{ran}(\phi\,|\,\alpha)=\varnothing$. 令 α_0 是满足这个条件的最小的 α. 那

么，$\phi:\alpha_0\to A$ 是一一对应. 这个一一对应把 α_0 上的良序关系传递为 A 上的一个良序关系. 证毕.

良序公理保证了我们可以认为任意的集合上存在良序关系，甚至可以认为这个良序关系的序数是极限序数（假定集合是无限的）或者后继序数，从而，可以在这个集合上用归纳证明和归纳定义. 后面，将会看到一些例子. Zorn 引理是我们需要的另一个和选择公理等价的命题，它在很多数学分支中有非常重要的应用.

设 $(P,\leqslant)$ 是偏序集，C 是 P 的子集，如果 $\leqslant_C$ 是 C 上的全序关系，则称 C 为 $(P,\leqslant)$ 的一个**链**.

定理 1.4.2（Zorn 引理） 设 $(P,\leqslant)$ 是非空偏序集. 如果 $(P,\leqslant)$ 中的每一个链都有上界，那么，$(P,\leqslant)$ 存在极大元.

证明 我们利用良序公理（定理 1.4.1）证明这个结果.

设 $\preceq$ 是 P 上的一个良序关系，我们用 $b\prec a$ 表示 $b\preceq a$ 且 $b\neq a$. 利用定理 1.2.6[①]定义映射 $f:P\to\{0,1\}$ 为：对任意的 $a\in P$，

$$f(a)=\begin{cases}1, & \text{如果对任意的}\, b\prec a,\ f(b)=1\,\text{能推出}\, b\leqslant a,\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

令

$$C=\{c\in P: f(c)=1\}.$$

那么，C 是 $(P,\leqslant)$ 的一个链. 事实上，对任意的 $c_1,c_2\in C$，不妨设 $c_1\prec c_2$. 由于 $f(c_1)=1$，所以，由 $f(c_2)$ 的定义，只有当 $c_1\leqslant c_2$ 时才有 $f(c_2)=1$. 现在，由于 $f(c_2)=1$ 确实成立，因此，我们有 $c_1\leqslant c_2$.

由定理的假设，C 在 $(P,\leqslant)$ 上有上界 t. 我们证明 t 是 $(P,\leqslant)$ 的极大元. 否则，集合 $A=\{s\in P\setminus\{t\}: t\leqslant s\}\neq\varnothing$. 令 s_0 是 A 在 $(P,\preceq)$ 中的最小元. 那么，对任意的 $b\prec s_0$，如果 $f(b)=1$，则 $b\in C$. 由此能推出，$b\leqslant t\leqslant s_0$. 由 $f(s_0)$ 的定义知 $f(s_0)=1$. 所以，$s_0\in C$. 故，$s_0\leqslant t$. 此矛盾于 s_0 的定义. 证毕.

① 定理1.2.6的本质是假设 $(W,\leqslant)$ 是一个良序集，如果对任意的 $x\in W$，假设对任意的 $y\in W(x)$，$f(y)\in Y$ 已经有定义，我们可以依次定义 $f(x)\in Y$，那么，就定义了一个映射 $f:W\to Y$. 在定理1.4.1的证明中，我们严格按照定理1.2.6的格式给出了证明，但在定理1.4.2的证明中，不再给出定理1.2.6所要求的 Φ 的具体定义，请读者给出一个.

定义 1.4.1 设 $\mathcal{S}=\{X_s:s\in S\}$ 是集合，也即 $\{X_s:s\in S\}$ 是对 $\mathcal{S}$ 的指标化. 令

$$\prod_{s\in S}X_s=\{f:S\to\bigcup_{s\in S}X_s:\text{对任意的}\,s\in S\,\text{有}\,f(s)\in X_s\}.$$

显然，$\prod_{s\in S}X_s$ 是集合，称之为 $\{X_s:s\in S\}$ 的 **Cartesian 乘积**，简称为**乘积**. 每一个 X_s 被称为这个乘积的**因子集合**或者**因子**.

定理 1.4.3 $\prod_{s\in S}X_s=\varnothing$ 当且仅当存在 $s\in S$，使得 $X_s=\varnothing$.

证明 如果存在 $s\in S$，使得 $X_s=\varnothing$，由定义，有 $\prod_{s\in S}X_s=\varnothing$. 反之，如果对任意的 $s\in S$，$X_s\neq\varnothing$，由选择公理可得 $\prod_{s\in S}X_s\neq\varnothing$. 证毕.

下面，我们考虑几种特殊情况.

如果对任意的 $s\in S$，$X_s=X$，那么，由定义

$$\prod_{s\in S}X_s=X^S.$$

如果 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 是有限集，那么，我们能建立一个自然的一一对应：

$$\phi:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to\prod_{s\in S}X_s.$$

事实上，对任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$，按下面的方法可以定义 $\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\prod_{s\in S}X_s$. 对任意的 $s\in S=\{1,2,\cdots,n\}$，令

$$\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)(s)=x_s.$$

那么，很容易验证 $\phi:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to\prod_{s\in S}X_s$ 是一一对应. 因此，今后我们将视 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 和 $\prod_{s\in S}X_s$ 为同一个集合.

对我们而言，最重要的情况是 $S=\mathbb{N}$，此时也可以将 $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ 写为

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\times\cdots\text{或者}\,X_1\times X_2\times\cdots.$$

$x\in\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ 经常被写为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 或者 $(x_1,x_2,\cdots)$，这里 $x_n=x(n)$. 这样

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = X_1 \times X_2 \times \cdots = \{(x_1, x_2, \cdots) : \text{对任意的 } n \in \mathbb{N}, x_n \in X_n\}.$$

今后，我们将视各种方便分别使用记号 x_n 或者记号 $x(n)$．同样，记号 (x_n) 和 $(x_n)_n$ 也将被同时使用．

一个由 $\mathbb{N}$ 到集合 X 的映射被称为 X 上的一个**序列**．序列 $x:\mathbb{N}\to X$ 一般被写为 $(x_n)_n$ 或者 (x_n)，这里，$x_n = x(n)$．那么，

$$X^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_n : x_n \in X\} = \{(x_n) : x_n \in X\} = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n,$$

这里，对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$X_n = X$．在本章第一节，对任意的集合 X 和任意的 $n\in\omega$，我们已经定义了 X^n．和此记号对应的，我们有时用 X^∞ 记 $X^{\mathbb{N}}$ 或者 X^ω．

下面给出乘积的一个简单性质．

设 $S=\bigcup_{i\in I} S_i$，且对任意不同的 $i_1, i_2 \in I$，$S_{i_1}\cap S_{i_2} = \varnothing$．则

$$\prod_{s\in S} X_s \text{ 和 } \prod_{i\in I}\left(\prod_{s\in S_i} X_s\right)$$

之间存在一个自然的一一对应．因此，以后将认为它们是一样的．

定义 1.4.2 设 $\prod_{s\in S} X_s$ 是 $\{X_s : s\in S\}$ 的乘积，对任意的 $s\in S$，我们能够定义 $p_s : \prod_{s\in S} X_s \to X_s$ 为：对任意的 $f\in\prod_{s\in S} X_s$，

$$p_s(f) = f(s).$$

称 p_s 为向因子 X_s 的**投影映射**．如果 $\prod_{s\in S} X_s \neq \varnothing$，那么 p_s 是满射．更一般地，设 $S_0\subset S$，我们能够定义 $p_{S_0} : \prod_{s\in S} X_s \to \prod_{s\in S_0} X_s$ 为：对任意的 $f\in\prod_{s\in S} X_s$，

$$p_{S_0}(f) = f\,|\,S_0.$$

称 p_{S_0} 为向 $\prod_{s\in S_0} X_s$ 的**投影映射**．

对任意的集合 Y 和映射 $f: Y\to\prod_{s\in S_0} X_s$，$\{p_s\circ f : Y\to X_s\}_{s\in S}$ 是一族映射．反之，设 $\{f_s : Y\to X_s\}_{s\in S}$ 是一族映射．那么，我们能够按下面的方式定义映射

$f:Y\to\prod_{s\in S_0}X_s$：对任意的 $y\in Y$ 和 $s\in S$，

$$f(y)(s)=f_s(y),$$

称之为由 $\{f_s:Y\to X_s\}_{s\in S}$ 确定的映射．那么，$p_s\circ f=f_s$．因此，映射 $f:Y\to\prod_{s\in S_0}X_s$ 和映射族 $\{f_s:Y\to X_s\}_{s\in S}$ 互相唯一确定．

如果对任意的 $s\in S$，$A_s\subset X_s$，那么

$$\prod_{s\in S}A_s\subset\prod_{s\in S}X_s,$$

称 $\prod_{s\in S}X_s$ 这样的子集为**乘积形状的子集**．注意，并非所有 $\prod_{s\in S}X_s$ 的子集都是乘积形状的．

练 习 1.4

1.4.A. 证明定理 1.4.3 中的论断在 ZF 系统中与选择公理等价．

1.4.B. 利用 Zorn 引理证明良序公理．

（提示：设 A 为集合，令

$$\mathcal{A}=\{(B,R):B\subset A\text{ 且 }(B,R)\text{ 是良序集合}\}.$$

在 $\mathcal{A}$ 上定义偏序关系：

$$(B_1,R_1)\leqslant(B_2,R_2)\text{ 当且仅当 }B_1\subset B_2\text{ 且 }R_1=R_2\cap(B_1\times B_1).$$

对偏序集 $(\mathcal{A},\leqslant)$ 应用 Zorn 引理得到其极大元使得 A 成为良序集．）

1.4.C. 对任意的 $s\in S$，设 $A_s,B_s\subset X_s$．证明：

$$\prod_{s\in S}A_s\cap\prod_{s\in S}B_s=\prod_{s\in S}(A_s\cap B_s).$$

但

$$\prod_{s\in S}A_s\cup\prod_{s\in S}B_s=\prod_{s\in S}(A_s\cup B_s)$$



未必成立.

1.4.D（König 定理）. 设 S 是非空集合. 对任意的 $s \in S$，设 A_s, B_s 是集合，且 $|A_s| < |B_s|$. 证明：

$$\left|\bigcup_{s\in S} A_s\right| < \left|\prod_{s\in S} B_s\right|.$$

证明定理 1.3.5 是这个结论的推论.

第 2 章 度量空间

本章将介绍度量空间及其相关概念和它们的基本性质, 以便为以后的讨论提供基本的术语和事实. 同时, 本章中含有大量的例子, 这些例子对于理解本章内容乃至全书内容都是非常重要的, 请读者不要轻视它们.

本章中, 除 2.8 节外, 其他各节内容都是基本的且重要的.

2.1 度量空间的定义及例子

度量空间是我们所熟悉的 Euclidean 空间的自然推广, 它给分析中我们所熟悉的一致收敛等理论提供了一个一般框架, 它也是本课程中最重要的定义之一. 本节将定义度量空间, 并给出几个自然的和不自然的度量空间的例子.

定义 2.1.1 设 X 是非空集合[①], $d: X\times X\to\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$ 是一个映射, 若对任意 $x,y,z\in X$, 下面的性质成立:

(M1) (**正定性**) $d(x,y)\geqslant 0$, 且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(M2) (**对称性**) $d(x,y)=d(y,x)$;

(M3) (**三角不等式**) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$,

则称 (X,d) 是**度量空间**, d 称为 X 上的**度量**, $d(x,y)$ 称为点 x,y 的**距离**.

例 2.1.1 设 X 是非空集合, 定义 $d: X\times X\to\mathbb{R}^+$ 为

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\neq y,\\ 0, & \text{如果 } x=y,\end{cases}$$

① 一般来说, 我们总是假定X是非空的, 但是, 也有一些特殊情况, 为了方便, 也允许 $X=\varnothing$.

则 (X,d) 是度量空间.

验证以上三条是平凡的, 留给读者. 这个度量空间称为**离散度量空间**.

例 2.1.2 n-维 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$. 定义 $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ 为

$$d((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2},$$

则 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是度量空间.

事实上, 验证定义 2.1.1 中的(M1)(M2)是显然的, 我们只证明(M3). 考虑关于 t 的二次三项式:

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_it)^2,\quad a_i, b_i \text{ 是实数}.$$

它没有相异的实根, 因此判别式 $\leqslant 0$, 即对任意的实数 a_i, b_i 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2 .$$

此公式称为 **Cauchy 不等式**. 由此公式, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2&=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\&=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2.\end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

现在, 对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n$, 令 $a_i=x_i-z_i$, $b_i=z_i-y_i$, 代入上式得(M3)成立.

$\mathbb{R}^n$ 称为 **n-维 Euclidean 空间**, 一般用 $\mathbb{R}$ 记 $\mathbb{R}^1$.

例 2.1.3 定义 $\rho:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ 为

$$\rho((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n))=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\cdots,|x_n-y_n|\}.$$

则 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 是度量空间.

此时，定义 2.1.1 中（M1）（M2）（M3）的验证是显然的.

度量空间 $(\mathbb{R}^n,d)$ 与 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 是不同的度量空间，但它们存在着密切的关系，所以在一定意义上也是“相同”的，详见本章 2.5 节.

例 2.1.4 设 $\ell^2=\{(x_1,x_2,\cdots)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty\}$，定义 $d:\ell^2\times\ell^2\to\mathbb{R}^+$ 为

$$d((x_1,x_2,\cdots),(y_1,y_2,\cdots))=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}.$$

则 (ℓ^2,d) 是度量空间.

为此，注意到对任意的 $(x_1,x_2,\cdots)$，$(y_1,y_2,\cdots)\in\ell^2$ 和任意的 $N\in\mathbb{N}$，

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}2(x_i^2+y_i^2)\leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2+\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2\right)<\infty.$$

故级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2$ 收敛，所以 $d:\ell^2\times\ell^2\to\mathbb{R}^+$ 确实为一个映射. d 满足定义中的（M1）（M2）是显然的. 对于例 2.1.2 的公式（M3），令 $n\to\infty$（相关级数是收敛的），可得本例中的（M3）成立.

ℓ^2 称为 **Hilbert 空间** ℓ^2.

例 2.1.5 设 $X=(-1,1)$，定义 $d:(-1,1)\times(-1,1)\to\mathbb{R}^+$ 为

$$d(x,y)=|x-y|.$$

则 $((-1,1),d)$ 是度量空间. 现在定义 $\rho:(-1,1)\times(-1,1)\to\mathbb{R}^+$ 为

$$\rho(x,y)=\left|\tan\frac{\pi}{2}x-\tan\frac{\pi}{2}y\right|.$$

则 ρ 也是 $(-1,1)$ 上的一个度量.

例 2.1.6 定义 $\rho:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$ 为

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\begin{cases}|y_1-y_2|, & \text{如果 } x_1=x_2,\\ |y_1|+|x_1-x_2|+|y_2|, & \text{如果 } x_1\neq x_2.\end{cases}$$

则 ρ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个度量.

我们仅需要验证三角不等式（M3）成立. 设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in\mathbb{R}^2$，我们证明

$$\rho((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \leqslant \rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + \rho((x_2,y_2),(x_3,y_3)). \quad (2\text{-}1\text{-}1)$$

情况 A. 当 $x_1 = x_3$ 时,

$$式左 = |y_1 - y_3|,$$

$$式右 \geqslant |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \geqslant |y_1 - y_3| = 式左.$$

情况 B. 当 $x_1 \neq x_3$ 时, 则 $x_2 \neq x_1$ 或者 $x_2 \neq x_3$, 不妨设 $x_2 \neq x_1$, 则

$$\begin{aligned} 式左 &= |y_1| + |x_1 - x_3| + |y_3| \\ &\leqslant |y_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |y_2| - |y_2| + |y_3| \\ &= \rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + |x_2 - x_3| + |y_3| - |y_2|. \end{aligned}$$

不论 $x_2 = x_3$ 是否成立, 都有

$$|x_2 - x_3| + |y_3| - |y_2| \leqslant \rho((x_2,y_2),(x_3,y_3)),$$

故

$$式左 \leqslant \rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + \rho((x_2,y_2),(x_3,y_3)) = 式右.$$

因此, 式 (2-1-1) 成立.

此度量 ρ 被形象地称为 $\mathbb{R}^2$ 中的森林度量. 我们设想 $\mathbb{R}^2$ 为一大片森林, x 轴为这片森林中的一条河流, 河流可以用船交通. 居住在 (x,y) 处的居民, 为了和外界连通, 都修了一条小道和河流垂直. 这样, (x_1,y_1), (x_2,y_2) 两处的居民可以走通的最短距离恰好为 $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))$. 因此, 这个度量空间被称为**河流空间** (见图 2-1).

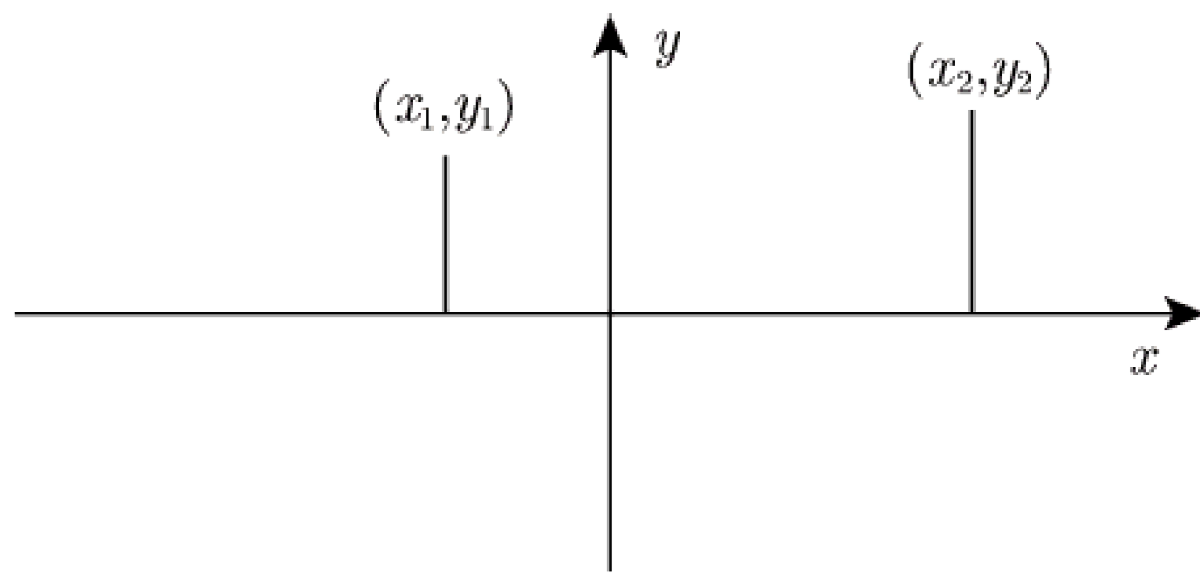


图 2-1 河流空间中两点的距离

对于上述例 2.1.2 中的 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$ 和例 2.1.4 中的 Hilbert 空间 ℓ^2, 请读者特别注意, 今后将多次使用.

定义 2.1.2 设 (X,d) 是度量空间，$A \subset X$. 若存在 $M \in \mathbb{R}^{+}$ 使得对任意的 $x,y \in A$ 有

$$d(x,y) \leqslant M,$$

则称 A 为 (X,d) 中的**有界集**，M 称为其一个**上界**. A 的所有上界的下确界称为 A 的**直径**，用 $\operatorname{diam} A$ 表示 A 的直径. 容易验证

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}.$$

若 $A = X$ 为 (X,d) 中的有界集，则称 (X,d) 为**有界度量空间**，d 称为**有界度量**，X 的一个上界称为这个度量空间的**一个上界**.

对于任意度量空间 (X,d)，令 $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}^{+}$ 为

$$\overline{d}(x,y) = \min\{d(x,y),1\}.$$

容易验证，$\overline{d}$ 为 X 上的一个度量. 显然，$\overline{d}$ 为 X 的一个有界度量. 我们称 $\overline{d}$ 为 d 的**标准有界化度量**. 我们将在 2.5 节给出 d 与 $\overline{d}$ 之间的密切关系.

上面例子中，例 2.1.1 和例 2.1.5 的第一个为有界度量空间，其余为无界度量空间.

定义 2.1.3 设 (X,d) 是度量空间，$x_0 \in X$，$\varepsilon > 0$. 令

$$B_{(X,d)}(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) < \varepsilon\},$$

称之为 (X,d) 中以 x_0 为中心、以 ε 为半径的球，也称为 x_0 的 **ε – 球形邻域**. 根据需要，$B_{(X,d)}(x_0,\varepsilon)$ 经常被记作 $B_X(x_0,\varepsilon)$，$B_d(x_0,\varepsilon)$ 或者 $B(x_0,\varepsilon)$.

显然，x_0 的 ε – 球形邻域关于 ε 是单调递增的.

在上面的例 2.1.1 中，对任意的 $x_0 \in X$，有

$$B(x_0,\varepsilon) = \begin{cases} \{x_0\}, & \text{如果}\ \varepsilon \leqslant 1, \\ X, & \text{如果}\ \varepsilon > 1. \end{cases}$$

在例 2.1.2 中，球恰好为我们所熟悉的不带边界的球；在例 2.1.3 中，球为不带边界的正方形 $(n=2)$，正方体 $(n=3)$，……读者可以考虑例 2.1.6 中一个点的球形邻域是什么集合.

在本节最后引入两个记号. 设 A 是度量空间 (X,d) 的子集. 对任意的 $x \in X$，令

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a):a\in A\}.$$

我们规定对任意的 $x\in X$,

$$d(x,\varnothing)=+\infty.$$

又对任意的 $y\in X$,

$$d(x,\{y\})=d(x,y).$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 令

$$B(A,\varepsilon)=\bigcup_{a\in A}B(a,\varepsilon).$$

练 习 2.1

2.1.A. 对于例子 2.1.6 中的空间, 令 $x=(0,1)$, $A=\{1\}\times\mathbb{R}$, 求 $d(x,A)$.

2.1.B. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是严格递增的连续函数（按分析中的定义）, 定义 $\rho:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 为

$$\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|.$$

证明 $(\mathbb{R},\rho)$ 是度量空间.

2.1.C. 设 $\mathrm{C}([a,b])$ 是由非单点的闭区间 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的所有连续函数（按分析中的定义）. 对任意的 $f,g\in\mathrm{C}([a,b])$, 令

$$d(f,g)=\sqrt{\int_a^b(f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x}.$$

证明 $(\mathrm{C}([a,b]),d)$ 是度量空间.

如果 $\mathrm{C}([a,b])$ 用由 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的所有 Riemann 可积函数（按分析中的定义）代替, 上面结论成立吗?

2.1.D. 对于例子 2.1.2 中的 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^2$, 求下列集合的直径:

(1) $A=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$;

(2) $B=\mathbf{I}\times\mathbf{I}$;

(3) C 是以点 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ 为顶点的三角形的边界、内部、边界和内部之并、外部（按直观的定义理解本例中的上述概念）.

2.1.E. 设 (X,d) 是度量空间, 定义 $\rho:X\times X\to\mathbb{R}^+$ 为

$$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},$$

证明 (X,ρ) 是有界度量空间.

2.2 开集、闭集、基、序列

和在 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$ 一样, 本节我们将定义开集、闭集、基和序列等概念, 并给出它们的基本关系.

从本节开始, 我们将逐渐减少对具体度量的依赖. 这样做有两个原因: 第一, 确实有一些问题不可以定义度量; 第二, 具体的度量有时是不必要的, 甚至为我们带来不必要的麻烦.

定义 2.2.1 设 (X,d) 是度量空间, $U\subset X$. 若对任意的 $x\in U$, 存在 $\varepsilon_x>0$ 使得

$$B(x,\varepsilon_x)\subset U,$$

则称 U 为 X 中的**开集**. 用 $\mathcal{T}_{(X,d)}$ 表示 (X,d) 中开集的全体, 称 $\mathcal{T}_{(X,d)}$ 为 (X,d) 上的拓扑. $\mathcal{T}_{(X,d)}$ 一般简记为 $\mathcal{T}_d$, 有时根据需要, 也记为 $\mathcal{T}_X$.

我们有下面重要的结论.

定理 2.2.1 对任意的度量空间 (X,d), $\mathcal{T}_d$ 有如下性质:

(T1) □, $X\in\mathcal{T}_d$;

(T2) $\mathcal{T}_d$ 对有限交封闭, 即若 $U_1,U_2,\cdots,U_n\in\mathcal{T}_d$, 则 $U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_n\in\mathcal{T}_d$;

(T3) $\mathcal{T}_d$ 对任意并封闭, 即对任意的族 $\{U_s:s\in S\}\subset\mathcal{T}_d$, 有 $\bigcup_{s\in S}U_s\in\mathcal{T}_d$.

证明 (T1) 因为 $x\in\varnothing$ 对任意的 $x\in X$ 都不会成立, 所以不需要找 $\varepsilon_x>0$, 从而□为开集.

又对任意的 $x\in X$, $B(x,1)\subset X$, 故 X 为开集.

(T2) 仅对 $n=2$ 证明, 一般的 n 只需使用数学归纳法即可. 设 $U_1,U_2\in\mathcal{T}_d$, $x\in U_1\cap U_2$, 则 $x\in U_1$ 且 $x\in U_2$. 由 $\mathcal{T}_d$ 的定义, 存在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ 使得

$$B(x,\varepsilon_1)\subset U_1 \text{ 且 } B(x,\varepsilon_2)\subset U_2.$$

令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}>0$，则

$$B(x,\varepsilon)\subset B(x,\varepsilon_1)\cap B(x,\varepsilon_2)\subset U_1\cap U_2.$$

因此，$U_1\cap U_2\in\mathcal{T}_d$.

（T3）设 $\{U_s:s\in S\}\subset\mathcal{T}_d$，对任意的 $x\in\bigcup_{s\in S}U_s$，存在 $s_0\in S$ 使得 $x\in U_{s_0}\in\mathcal{T}_d$. 故存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$B(x,\varepsilon)\subset U_{s_0}\subset\bigcup_{s\in S}U_s.$$

从而 $\bigcup_{s\in S}U_s\in\mathcal{T}_d$. 证毕.

定义 2.2.2 设 (X,d) 是度量空间，$F\subset X$. 若 $X\setminus F$ 是 (X,d) 中的开集，则称 F 为 (X,d) 中的**闭集**.

利用定理 2.2.1 和 de Morgan 对偶律（练习 1.1.D），有：

定理 2.2.2 设 (X,d) 是度量空间，则

（C1）□, X 是闭集；

（C2）全体闭集族对有限并封闭；

（C3）全体闭集族对任意交封闭.

注 2.2.1 按照注 1.1.1，我们不能证明空集的交的存在性. 在一个特定的度量空间 (X,d) 中，为了方便，我们总是规定空集的交为 X. 这时，定理 2.2.1（T2）和定理 2.2.2（C3）对空集也成立. 这样的规定不会导致任何矛盾. 当然，也不会给我们带来任何实质性的用处，所以，你也可以不认可这个规定.

另外，还有下面直接判断集合是否为闭集的方法.

定理 2.2.3 设 (X,d) 是度量空间，$F\subset X$. 则下列条件等价：

（1）F 是闭集；

（2）对任意的 $x\notin F$，存在 $\varepsilon_x>0$ 使得 $B(x,\varepsilon_x)\cap F=\varnothing$；

（3）对任意的 $x\notin F$，存在包含 x 的开集 U 使得 $U\cap F=\varnothing$.

定理 2.2.4 对任意度量空间 (X,d) 和 $x\in X$，单点集 $\{x\}$ 是闭的.

以上定理的证明留给读者.

定义 2.2.3 设 (X,d) 是度量空间，$x \in X$. 如果 $\{x\}$ 是 X 的开集，则称 x 为 X 的**孤立点**.

离散空间中的每一点都是孤立点，Euclidean 空间 $(\mathbb{R}^n,d)$ 中无孤立点.

在 2.1 节的例 2.1.1 中，所有集合都是开集同时也是闭集；在例 2.1.2 和例 2.1.3 中，集合 U 在 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 中开当且仅当其在 $(\mathbb{R}^n,d)$ 中开. 请读者验证之. 对于例 2.1.5 中在 $(-1,1)$ 上定义的两个度量 d, ρ 而言，$((-1,1),d)$ 与 $((-1,1),\rho)$ 也有相同的开集族. 我们注意到，d 是 $(-1,1)$ 上的有界度量，ρ 是无界度量. 进一步，我们有下面的一般性结论.

定理 2.2.5 设 (X,d) 是度量空间，$\overline{d}$ 为 d 的标准有界化度量，则 $(X,\overline{d})$ 与 (X,d) 有相同的开集族，即 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\overline{d}}$.

证明 设 U 在 (X,d) 中开，我们证明 U 在 $(X,\overline{d})$ 中也开. 设 $x \in U$，由于 U 在 (X,d) 中开，故存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$B_d(x,\varepsilon) \subset U.$$

令 $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, 1\}$，则

$$B_d(x,\varepsilon') \subset B_d(x,\varepsilon) \subset U.$$

由 $\overline{d}$ 的定义知

$$B_{\overline{d}}(x,\varepsilon') = B_d(x,\varepsilon') \subset B_d(x,\varepsilon) \subset U.$$

故 U 在 $(X,\overline{d})$ 中开. 反之，设 U 在 $(X,\overline{d})$ 中开，则对任意的 $x \in U$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$B_{\overline{d}}(x,\varepsilon) \subset U,$$

由于对任意的 $x, y \in X$，

$$\overline{d}(x,y) \leqslant d(x,y),$$

故

$$B_d(x,\varepsilon) \subset B_{\overline{d}}(x,\varepsilon) \subset U.$$

所以 U 在 (X,d) 中也开. 证毕.

一般来说，一个度量空间的开集和开集全体是复杂的，我们可以选择一部分比较简单的开集使得这些开集仍然可以在很多情况下起到全体开集的

作用. 下面定义基和子基就是这个目的, 后面定义邻域基等概念也有类似的作用.

定义 2.2.4 设 (X,d) 是度量空间, $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}_d$. 若对任意的 $U\in\mathcal{T}_d$, 存在 $\mathcal{B}$ 的一个子族 $\mathcal{B}_U$ 使得

$$\bigcup\mathcal{B}_U=U,$$

则称 $\mathcal{B}$ 为 (X,d) 的一个**基**.

定理 2.2.6 设 (X,d) 是度量空间, 则 $\mathcal{B}=\{B(x,\varepsilon):x\in X,\varepsilon>0\}$ 是 (X,d) 的一个基.

证明 首先证明 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}_d$, 即每一个球都是开集. 设 $x\in X$, $\varepsilon>0$, $y\in B(x,\varepsilon)$, 即 $d(x,y)<\varepsilon$. 令 $\delta=\varepsilon-d(x,y)>0$, 如图 2-2 所示, 我们证明 $B(y,\delta)\subset B(x,\varepsilon)$. 事实上, 对任意的 $z\in B(y,\delta)$, 有

$$d(z,y)<\delta=\varepsilon-d(x,y),$$

故

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)<\varepsilon.$$

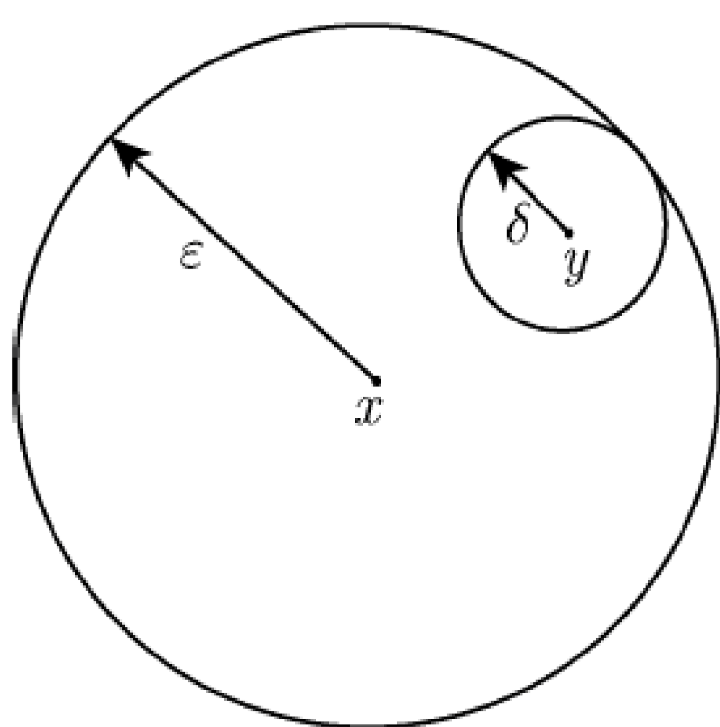


图 2-2 δ 的选择

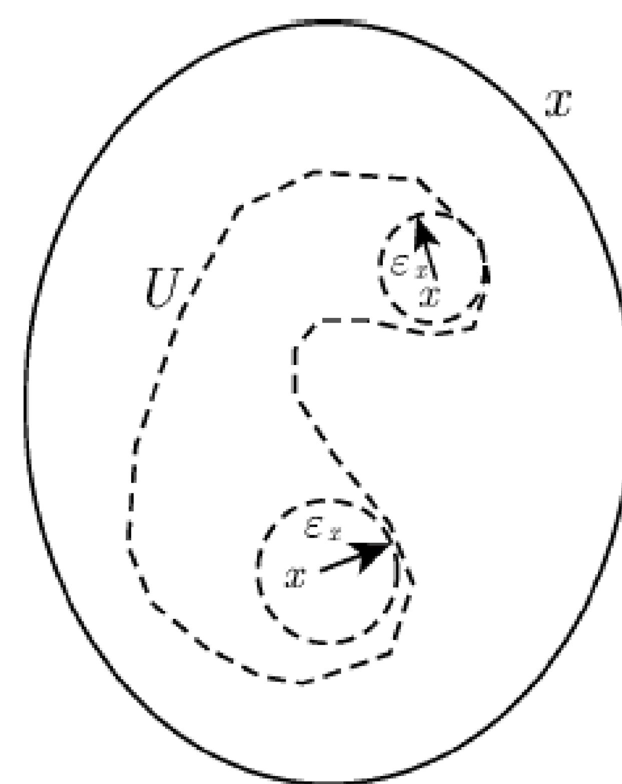


图 2-3 ε_x 的选择

其次, 证明每一个开集都可表示为一族球之并. 设 $U\in\mathcal{T}_d$, 则对任意的 $x\in U$, 存在 $\varepsilon_x>0$ 使得 $B(x,\varepsilon_x)\subset U$, 如图 2-3 所示, 故

$$\{x\}\subset B(x,\varepsilon_x)\subset U.$$

所以

$$U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subset\bigcup_{x\in U}B(x,\varepsilon_x)\subset\bigcup_{x\in U}U=U.$$

因此

$$U=\bigcup_{x\in U}B(x,\varepsilon_x).$$

证毕.

定理 2.2.7 设 (X,d) 是度量空间, $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}_d$ 是 (X,d) 的基当且仅当对任意开集 U 和任意的 $x\in U$, 存在 $B\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in B\subset U$.

此定理是验证一个开集族是基的重要方法, 请读者自证.

定义 2.2.5 设 X 是度量空间, $\mathcal{S}$ 是 X 的一族开集, 若

$$\mathcal{B}=\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n:S_i\in\mathcal{S},\forall i=1,2,\cdots,n:n=1,2,\cdots\}$$

是 X 的基, 则称 $\mathcal{S}$ 是 X 的**子基**. 即, 如果 $\mathcal{S}$ 的有限交的全体构成 X 的基, 则称 $\mathcal{S}$ 是 X 的子基.

例如, 在 $\mathbb{R}$ 中,

$$\mathcal{B}_1=\{(a,b):a<b\}\text{ 及 }\mathcal{B}_2=\{(a,b):a<b\text{ 且 }a,b\text{ 均为有理数}\}$$

都是 $\mathbb{R}$ 的基.

$$\mathcal{S}_1=\{(-\infty,b):b<\mathbb{R}\}\cup\{(a,+\infty):a\in\mathbb{R}\}$$

都是 $\mathbb{R}$ 的子基. 另外,

$$\mathcal{S}_2=\{(-\infty,b):b<\mathbb{Q}\}\cup\{(a,+\infty):a\in\mathbb{Q}\}$$

也是 $\mathbb{R}$ 的子基.

定义 2.2.6 设 (X,d) 是度量空间, $x_0\in X$. 一个包含 x_0 的开集称为 x_0 的**一个邻域**, 用 $\mathcal{N}(x_0)$ 或 $\mathcal{N}_d(x_0)$ 表示 x_0 的邻域全体. 设 $\mathcal{U}\subset\mathcal{N}(x_0)$, 若对任意 x_0 的邻域 V, 存在 $U\in\mathcal{U}$ 使得 $U\subset V$, 则称 $\mathcal{U}$ 为 X 在点 x_0 的**邻域基**.

由定理 2.2.1 (T2) 知, $\mathcal{N}(x_0)$ 对有限交封闭, 即 x_0 的有限个邻域的交也是 x_0 的邻域. 对 $\varepsilon>0$, 我们称 $B_d(x_0,\varepsilon)$ 为 x_0 在 (X,d) 中的**球形邻域**. 显然, x_0 的所有球形邻域是点 x_0 的一个邻域基. 更少一点, 设 $\{\varepsilon_n:n=1,2,\cdots\}$ 是一个正数列且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, 则 $\{B(x_0,\varepsilon_n):n=1,2,\cdots\}$ 是 x_0 的一个邻域基. 例如, $\left\{B\left(x_0,\frac{1}{n}\right):n=1,2,\cdots\right\}$ 是 x_0 的一个邻域基. 关于邻域与开集的关系, 有下面

简单的定理.

定理 2.2.8 设(X,d)是度量空间，$U\subset X$. 则U是开集当且仅当对任意的$x\in U$，U包含x的一个邻域.

证明 如果U是开集，由邻域的定义知，对任意的$x\in U$，$U\in\mathcal{N}(x)$，从而U包含x的一个邻域U. 反之，设对任意的$x\in U$，U包含x的一个邻域V_x，那么，

$$U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subset\bigcup_{x\in U}V_x\subset U.$$

从而，由定理 2.2.1（T3）知，$U=\bigcup_{x\in U}V_x$是开集. 证毕.

我们能把数学分析中的序列收敛概念推广到一般的度量空间中.

定义 2.2.7 设(X,d)是度量空间，X中的一个序列x也称为度量空间(X,d)的**序列**. 设$\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$是严格单调递增的映射，我们称序列$x\circ\phi$为序列$x$的一个子列，记为$(x_{n_i},i=1,2,\cdots)$或$(x_{n_i})$，这里，$x_{n_i}=x(\phi(i))$，$n_i=\phi(i)$. 设$x\in X$，若对$x$的任意邻域$U$，存在$N\in\mathbb{N}$使得对任意的$n>N$有$x_n\in U$，则称序列$(x_n,n=1,2,\cdots)$**收敛**于点$x\in X$或者序列$(x_n,n=1,2,\cdots)$的**极限**为点$x\in X$，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x\text{ 或 }x_n\to x(n\to\infty)\text{ 或者 }x_n\to x.$$

这时，我们称(x_n)是**收敛序列**，序列也简称为**列**.

下面两个定理的证明留给读者.

定理 2.2.9 设(x_n)是度量空间(X,d)中的序列，$x\in X$，则下列条件等价：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}d(x,x_n)=0$（在$\mathbb{R}$中）.

定理 2.2.10 对任意度量空间X和X中的收敛序列(x_n)，

（1）(x_n)的极限唯一；

（2）(x_n)的任何子列都收敛且任何子列的极限都等于(x_n)的极限.

例 2.2.1 在例 2.1.6 中$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n},1\right)=(0,1)$成立吗？为什么？

我们有下面重要的结论.

定理 2.2.11 设 d,ρ 是集合 X 上的两个度量，则 $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_\rho$ 当且仅当对 X 中任意的序列 (x_n) 和点 x，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 在 (X,d) 中成立当且仅当其在 (X,ρ) 中成立.

证明 “$\Rightarrow$”. 若 $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_\rho$，由定理 2.2.8 知，在 (X,d) 和 (X,ρ) 中，点 x 有相同的邻域，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 在 (X,d) 中成立当且仅当其在 (X,ρ) 中成立.

“$\Leftarrow$”. 用反证法. 设 $\mathcal{T}_d\neq\mathcal{T}_\rho$，不妨设存在 $U\in\mathcal{T}_d\setminus\mathcal{T}_\rho$，则 $U\neq\varnothing$. 由定理 2.2.8 知，存在 $x\in U$ 使得对任意的 $\delta>0$ 有 $B_\rho(x,\delta)\not\subset U$. 由于 $U\in\mathcal{T}_d$，故存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B_d(x,\varepsilon)\subset U$. 但由前面的 x 的选择，对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$B_\rho\left(x,\dfrac{\varepsilon}{n}\right)\not\subset U$. 由此可知，对任意的 n，

$$B_\rho\left(x,\frac{\varepsilon}{n}\right)\not\subset B_d(x,\varepsilon),$$

选择 $x_n\in B_\rho\left(x,\dfrac{\varepsilon}{n}\right)\setminus B_d(x,\varepsilon)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 在 (X,ρ) 中成立，但在 (X,d) 中不成立. 前者是因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{n}$，后者是因为对一切 n，$x_n\notin B_d(x,\varepsilon)$ 成立. 证毕.

序列的收敛性可以刻画一个集合是否为闭集.

定理 2.2.12 设 (X,d) 是度量空间，$F\subset X$，则 F 是 X 中的闭集当且仅当对 F 中任意序列 x_n，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in F$.

证明留作练习

在本节最后，我们定义一个概念.

定义 2.2.8 设 (X,d) 是度量空间，$D\subset X$，如果对任意的 $d\in D$，存在开集 U 使得

$$U\bigcap D=\{d\},$$

则称 D 是 X 的**离散子集**.

离散空间是自己的离散子集. $\mathbb{N}$ 和 $Z=\left\{\dfrac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的离散子集. ¤，$\mathbb{P}$ 和 $(0,1)$ 都不是 $\mathbb{R}$ 中的离散子集.

练 习 2.2

2.2.A. 对于练习 2.1.E 中定义的 ρ, 证明 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$.

2.2.B. 设 (X,d) 是度量空间, 定义

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n} \right) : x \in X, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

证明 $\mathcal{B}$ 是 (X,d) 的基.

2.2.C. 证明离散空间中任何子集都是离散的.

2.3 闭包、内部、边界

本节将延续上一节的讨论, 定义闭包、内部、边界等集合的运算, 并讨论它们的性质.

2.3.1 闭包

定义 2.3.1 设 X 是度量空间, $A \subset X$, $x \in X$. 若对任意 $U \in \mathcal{N}(x)$,

$$(U \setminus \{x\}) \bigcap A \neq \varnothing,$$

则称 x 是 A 的**聚点**. A 的聚点之集用 $\operatorname{der} A$ 表示, 称为 A 的**导集**. 更重要的是,

$$\operatorname{cl} A = A \bigcup \operatorname{der} A$$

称为 A 的**闭包**.

容易验证, $x \in \operatorname{cl} A$ 当且仅当对任意 $U \in \mathcal{N}(x)$,

$$U \bigcap A \neq \varnothing.$$

进一步, 显然 der 和 cl 都是单调递增的, 即大集合有大的导集和大的闭包. 我们有如下结论.

定理 2.3.1 对任意的度量空间 X 和子集 A, $\operatorname{der} A$ 和 $\operatorname{cl} A$ 都是闭集, 且 $\operatorname{cl} A$ 是包含 A 的最小闭集.

证明 设 $x \notin \operatorname{der} A$，则存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $(U \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$．注意到，对任意 $y \in U \setminus \{x\}$，

$$U \setminus \{x\} = U \cap (X \setminus \{x\}) \in \mathcal{N}(y) \text{ 且 } ((U \setminus \{x\}) \setminus \{y\}) \cap A = \varnothing,$$

所以 $y \notin \operatorname{der} A$．由此说明 $U \cap \operatorname{der} A = \varnothing$．由于 U 是开集，利用定理 2.2.3 知 $\operatorname{der} A$ 是闭的．

$\operatorname{cl} A$ 是闭集的证明可仿上进行．

现在证明 $\operatorname{cl} A$ 是包含 A 的最小闭集．令

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ 是闭集且 } F \supset A\}.$$

则由定理 2.2.2 知，$\overline{A}$ 是闭的，且显然 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集，由此知 $\operatorname{cl} A \supset \overline{A}$．若 $x \notin \overline{A}$，则存在闭集 F 使得 $F \supset A$ 且 $x \notin F$．由此知

$$X \setminus F \in \mathcal{N}(x) \text{ 且 } (X \setminus F) \cap A \subset (X \setminus F) \cap F = \varnothing.$$

因此 $x \notin \operatorname{cl} A$．证毕．

关于闭包运算，有如下的 Kuratowski 闭包定理．

定理 2.3.2（Kuratowski 闭包定理） 设 A,B 是度量空间 X 的子集，则

（1） $\operatorname{cl} \varnothing = \varnothing$；

（2） $\operatorname{cl} A \supset A$；

（3） $\operatorname{cl} \operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$；

（4） $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$．

证明 （1） 和 （2） 是显然的．

由于 $\operatorname{cl} A$ 是闭集，所以 $\operatorname{cl} A$ 是包含它自己的最小闭集，故 $\operatorname{cl} \operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$，即（3）成立．

由 $\operatorname{cl} A$ 是单调递增的，从而

$$\operatorname{cl}(A \cup B) \supset \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B.$$

又 $\operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B \supset A \cup B$，且前者为闭集，故

$$\operatorname{cl}(A \cup B) \subset \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B.$$

因此（4）成立. 证毕.

我们可以用序列的极限来刻画集合的闭包和导集.

定理 2.3.3 设 A 是度量空间 X 的子集，$x \in X$，则 $x \in \mathrm{cl}\, A (x \in \mathrm{der}\, A)$ 当且仅当存在 $A(A \setminus \{x\})$ 中的序列 (a_n) 使得 $a_n \to x$.

证明 下面以 $\mathrm{cl}\, A$ 为例证明. 设 $x \in \mathrm{cl}\, A$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. 特别地，选择 $a_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$，则 $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$，故 (a_n) 是 A 中序列，且 $\lim_{n \to \infty} a_n = x$. 反之，设 $x \notin \mathrm{cl}\, A$，则 $X \setminus \mathrm{cl}\, A \in \mathcal{N}(x)$，且对于 A 中任意序列 (x_n) 及 n, $x_n \notin X \setminus \mathrm{cl}\, A$，故 (x_n) 不收敛于 x（它也可能不收敛于任意点）. 证毕.

容易证明下面的定理.

定理 2.3.4 设 A 是度量空间 X 的子集，$x \in X$，则 $x \in \mathrm{cl}\, A$ 当且仅当 $d(x, A) = 0$.

请大家考虑下面的结论成立吗？在任意度量空间 (X, d) 中，对任意的 $x_0 \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，有

$$\mathrm{cl}\, B_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x_0, x) \leqslant \varepsilon\}.$$

2.3.2 内部

下面讨论度量空间的内部及其性质.

定义 2.3.2 设 A 是度量空间 X 的子集，$x \in A$. 若存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $U \subset A$，则称 x 为 A 的**内点**. A 的内点的全体称为 A 的**内部**，记作 $\mathrm{int}\, A$.

内部和闭包有以下联系：

定理 2.3.5 对于度量空间 X 中任意的子集 A，

$$\mathrm{int}\, A = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A) \text{ 且 } \mathrm{cl}\, A = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A).$$

证明

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{int}\, A &\Leftrightarrow \text{存在 } U \in \mathcal{N}(x) \text{ 使得 } U \subset A \\
&\Leftrightarrow \text{存在 } U \in \mathcal{N}(x) \text{ 使得 } U \cap (X \setminus A) = \varnothing \\
&\Leftrightarrow x \notin \mathrm{cl}(X \setminus A) \\
&\Leftrightarrow x \in X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A).
\end{aligned}$$

故第一式成立.

用 $X\setminus A$ 代替 A 可得第二式也成立. 证毕.

由上面的闭包与内部的关系定理和闭包的性质, 我们能够得到内部的相应结果, 证明留给读者.

定理 2.3.6 设 X 是度量空间, $A\subset X$, 则 int A 是包含于 A 的最大开集.

定理 2.3.7 设 X 是度量空间, $A,B\subset X$, 则

(1) $\operatorname{int} X = X$;

(2) $\operatorname{int} A\subset A$;

(3) $\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A$;

(4) $\operatorname{int}(A\cap B) = \operatorname{int} A\cap \operatorname{int} B$.

2.3.3 边界

下面定义度量空间中集合的边界.

定义 2.3.3 设 A 是度量空间 X 的子集, 若对任意的 $U\in\mathcal{N}(x)$,

$$U\cap A\neq\varnothing \text{ 且 } U\cap(X\setminus A)\neq\varnothing,$$

则称 x 为 A 的**边界点**. A 的边界点的全体称为 A 的**边界**, 用 bd A 表示之.

有下面一个简单事实, 它也说明了任何子集 A 都将度量空间 X 分成互不相交的三个子集之并: $\operatorname{int} A, \operatorname{bd} A, X\setminus \operatorname{cl} A$. 证明留给读者.

定理 2.3.8 设 A 是度量空间 X 的子集, 则 $\{\operatorname{int} A, \operatorname{bd} A, X\setminus \operatorname{cl} A\}$ 是 X 的一个分划.

推论 2.3.1 对于度量空间 X 中的任意子集 A, bd A 是闭集.

对于度量空间 (X,d) 和它的子集 A, 我们定义了算子 der A, cl A, int A, bd A. 有时为了说明这些算子所在的度量空间 (X,d), 需要添加一定的下标. 例如, $\operatorname{cl}_X A, \operatorname{int}_d A$ 等.

在本节最后我们给出下面两个定义.

定义 2.3.4 设 (X,d) 是度量空间, A 是 X 的子集. 如果 $\operatorname{cl} A = X$, 则称 A 是 (X,d) 的**稠密集合**. 如果 $\operatorname{int}\operatorname{cl} A=\varnothing$, 则称 A 是**无处稠密集合**.

容易验证, 集合 A 是度量空间 (X,d) 的稠密集当且仅当对任意的非空

开集 U, 有 $U\bigcap A\neq\varnothing$. A 是无处稠密的当且仅当对任意的非空开集 U, 存在非空开集 V 使得 $U\supset V$ 且 $V\bigcap A=\varnothing$.

练 习 2.3

2.3.A. 证明有理数集¤, 无理数集 $\mathbb{P}$ 都是 Euclidean 空间 $\mathbb{R}$ 的稠密集.

2.3.B. 设 (X,d) 是度量空间, $\mathcal{B}$ 是 (X,d) 的基. 证明集合 D 在 (X,d) 中稠密当且仅当对任意的非空集合 $B\in\mathcal{B}$, $B\bigcap D\neq\varnothing$.

2.3.C. 对于例子 2.1.2 中的空间 $\mathbb{R}$ 和例子 2.1.5 中的空间 $(-1,1)$, 分别求集合 $(0,1)$ 在其中的闭包、内部和边界.

2.3.D. 设 (A_n) 是度量空间 (X,d) 的集合列, 证明:

$$\mathrm{cl}\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{cl}\,A_n\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{cl}\bigcup_{n=1}^{\infty}A_i\right).$$

举例说明等式右边的第二项不可缺少.

2.3.E. 证明 Kuratowski14 集定理: 对于度量空间 (X,d) 中的任意集合 A, 通过取闭包、内部、余集三种运算最多可以得到 14 个不同的集合.

(提示: 本练习中可以用 $(\cdot)^{-}$, $(\cdot)^{o}$, $(\cdot)'$ 分别表示闭包、内部、余集三种运算. 先证明 $A^{-\prime-\prime-\prime-\prime-}=A^{-\prime-\prime-}$.)

给出 $\mathbb{R}$ 的一个子集 A 使得通过取闭包、内部、余集三种运算可以得到 14 个不同的集合.

2.3.F. 设 (X,d) 是度量空间, A 是 X 的子集. 如果 $A=\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\,A$, 则称 A 是空间 (X,d) 的正则开集. 正则开集的余集称为正则闭集. 证明以下结论:

(1) A 是正则闭集当且仅当 $A=\mathrm{cl}\,\mathrm{int}\,A$;

(2) 闭集的内部是正则开集;

(3) 正则开集关于有限交封闭 (即任意有限个正则开集的交是正则开集), 但关于有限并不封闭;

(4) 所有正则开集的全体构成空间的基.

2.3.G. 证明度量空间中任何集合不可能既是稠密集又是无处稠密集;

无处稠密集的余集一定是稠密集；一个集合是稠密开集的充分必要条件是其余集是无处稠密的闭集；举例说明稠密集的余集可能是稠密集.

2.4 连续映射、同胚、拓扑性质

本节将引入另一个最重要的概念—— 连续映射, 并给出其很多等价条件；同时也将定义同胚和拓扑性质的概念.

2.4.1 连续映射

定义 2.4.1 设 (X,d) 与 (Y,ρ) 是两个度量空间, $f:X\to Y$ 是映射, $x_0\in X$. 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意的 $x\in X$, 如果 $d(x,x_0)<\delta$, 那么,

$$\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon,$$

则称 f **在 x_0 点连续**. 若 f 在 X 的每一点都连续, 则称 f 为由度量空间 (X,d) 到度量空间 (Y,ρ) 的**连续映射**.

例 2.4.1 若 $(X,d)=(\mathbb{R}^n,d)$, $(Y,\rho)=(\mathbb{R},d)$, 则上述连续性和分析学中的连续性概念一致.

例 2.4.2 若 (X,d) 为离散度量空间, 则对任意的度量空间 (Y,ρ) 和任意的映射 $f:X\to Y$, f 都是连续的.

例 2.4.3 若 (X,d) 为度量空间, 则恒等映射 $\mathrm{id}_X:X\to X$ 是连续的. 另外, 对任意的度量空间 X, Y 及 $c\in Y$, 常值映射 $c:X\to Y$ 总是连续的.

下面的两个定理给出了连续的几个等价刻画, 今后将经常使用.

定理 2.4.1 设 (X,d) 与 (Y,ρ) 是度量空间, $x_0\in X$, $f:X\to Y$. 则下列条件等价:

(1) f 在 x_0 点连续;

(2) 对任意 $V\in\mathcal{N}(f(x_0))$, 存在 $U\in\mathcal{N}(x_0)$ 使得 $f(U)\subset V$;

（3）对 X 中的任意序列 (x_n)，若在 (X,d) 中，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 成立，则在 (Y,ρ) 中，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ 成立.

证明 （1）⇒（2）. 设（1）成立，则对任意的 $V \in \mathcal{N}(f(x_0))$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$B_\rho(f(x_0),\varepsilon) \subset V.$$

由于（1）成立，存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $x \in X$，若 $d(x,x_0) < \delta$，则

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

即若 $x \in B_d(x_0,\delta)$，则 $f(x) \in B_\rho(f(x_0),\varepsilon)$. 其等价于

$$f(B_d(x_0,\delta)) \subset B_\rho(f(x_0),\varepsilon) \subset V.$$

故若令 $U = B_d(x_0,\delta)$，则 U 为 x_0 的邻域且 $f(U) \subset V$，因此，（2）成立.

（2）⇒（3）. 设（2）成立，(x_n) 是 X 中的序列且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 为了证明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$，设 $V \in \mathcal{N}(f(x_0))$，则由（2），存在 $U \in \mathcal{N}(x_0)$ 使得

$$f(U) \subset V.$$

又由假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，故存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对任意的 $n > N$，$x_n \in U$. 故

$$f(x_n) \in f(U) \subset V.$$

由序列收敛的定义说明

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

（3）⇒（1）. 设（3）成立而（1）不成立，则存在 $\varepsilon > 0$，使得对任意的 $\delta > 0$，存在 $z_\delta \in X$ 使得

$$d(z_\delta, x_0) < \delta，但 \rho(f(z_\delta), f(x_0)) \geqslant \varepsilon.$$

特别地，分别取 $\delta = \dfrac{1}{n}$，令 $x_n = z_{\frac{1}{n}}$，则

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}，但 \rho(f(x_n), f(x_0)) \geqslant \varepsilon.$$

所以由定理 2.2.9 知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0，但 \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0).$$

矛盾于（3）成立. 证毕.

定理 2.4.2 设 $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ 是度量空间 (X,d) 到度量空间 (Y,ρ) 的映射, 则下列条件等价：

（1） f 在 X 上连续；

（2）对任意的 $V\in\mathcal{T}_\rho$, $f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_d$；

（3）对 (Y,ρ) 中的任意闭集 F, $f^{-1}(F)$在(X, d)中是闭集；

（4）存在 (Y,ρ) 的一个基 $\mathcal{B}$, 使得对任意的 $B\in\mathcal{B}$, $f^{-1}(B)\in\mathcal{T}_d$；

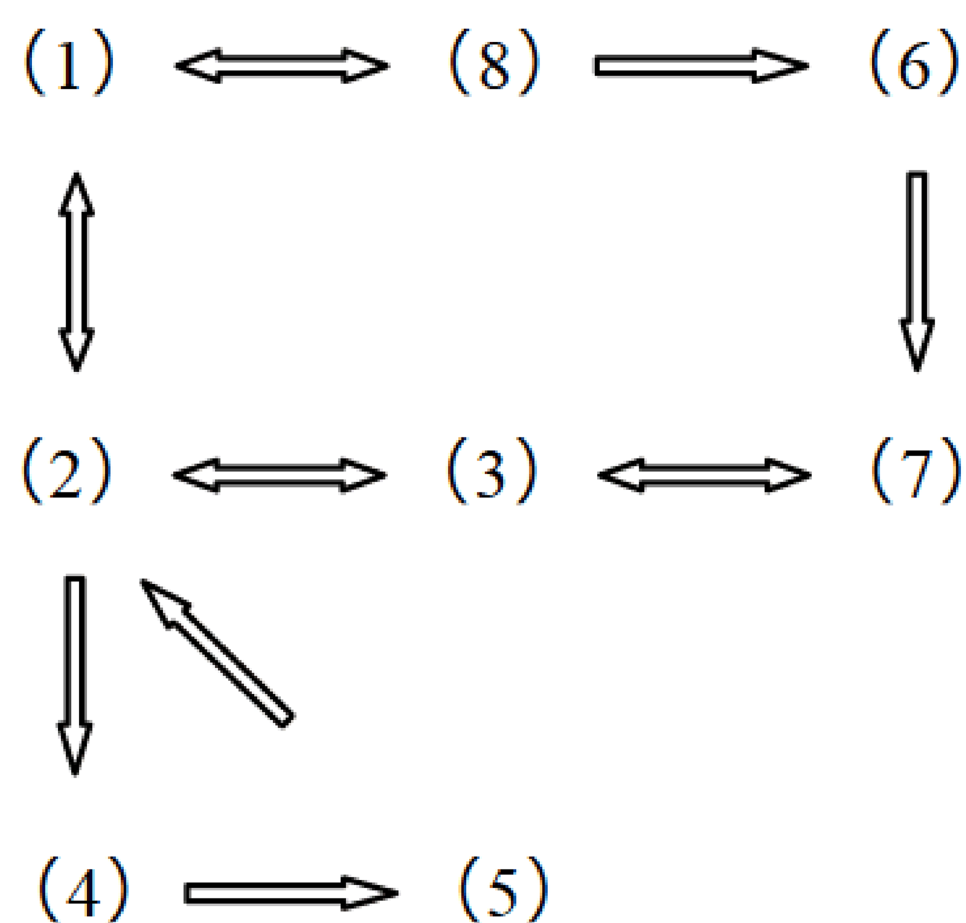
（5）存在 (Y,ρ) 的一个子基 $\mathcal{S}$, 使得对任意的 $S\in\mathcal{S}$, $f^{-1}(S)\in\mathcal{T}_d$；

（6）对 (X,d) 中的任意集合 A, 有 $f(\mathrm{cl}\,A)\subset\mathrm{cl}\,f(A)$；

（7）对 (Y,ρ) 中的任意集合 B, 有 $f^{-1}(\mathrm{cl}\,B)\supset\mathrm{cl}\,f^{-1}(B)$；

（8）对 X 中的任意收敛序列 $x_n\to x$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$.

证明 我们证明的思路如下：



（1）$\Leftrightarrow$（8）, 利用上面的定理和定义立即可得.（2）$\Leftrightarrow$（3）可由开集与闭集的互余性及 $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$ 得到.（2）$\Rightarrow$（4）$\Rightarrow$（5）是显然的.

现在我们证明（5）$\Rightarrow$（2）. 设 $\mathcal{S}$ 是 (Y,ρ) 的一个子基, 则

$$\mathcal{B}=\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n : S_i\in\mathcal{S},\forall i=1,2,\cdots,n;n=1,2,\cdots\}$$

是 (Y,ρ) 的基, 故对任意的 $V\in\mathcal{T}_\rho$, 存在集族 $\mathcal{V}=\{S_1^t\cap S_2^t\cap\cdots\cap S_{n_t}^t : t\in T\}\subset\mathcal{B}$ 使得 $V=\bigcup\mathcal{V}$, 其中, 对任意的 $t\in T$ 和任意的 $i\leqslant n_t$, $S_i^t\in\mathcal{S}$, 那么,

$$f^{-1}(V)=\bigcup\{f^{-1}(S_1^t\cap S_2^t\cap\cdots\cap S_{n_t}^t):t\in T\}$$
$$=\bigcup\left\{\bigcap_{i=1}^{n_t}f^{-1}(S_i^t):t\in T\right\}.$$

由假设, 对任意的 $t\in T$ 及任意的 $i\leqslant n_t$, $f^{-1}(S_i^t)\in\mathcal{T}_d$. 故由 $\mathcal{T}_d$ 对有限交和任意并封闭知 $f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_d$, 即（2）成立.

（1）⇒（2）. 设 f 在 X 上连续, $V\in\mathcal{T}_\rho$. 为了证明 $f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_d$, 设 $x\in f^{-1}(V)$, 则 $f(x)\in V$. 故存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$f(x)\in B_\rho(f(x),\varepsilon)\subset V.$$

由（1）, 存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $x'\in X$, 若 $d(x,x')<\delta$, 则

$$\rho(f(x),f(x'))<\varepsilon,$$

即
$$f(B_d(x,\delta))\subset B_\rho(f(x),\varepsilon)\subset V.$$

从而 $B_d(x,\delta)\subset f^{-1}(V)$. 故 $f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_d$.

（2）⇒（1）. 设（2）成立, $x_0\in X$. 对任意的 $\varepsilon>0$, 由定理 2.2.6, $B_\rho(f(x_0),\varepsilon)\in\mathcal{T}_\rho$, 故由（2）知

$$f^{-1}(B_\rho(f(x_0),\varepsilon))\in\mathcal{T}_d.$$

显然, $x_0\in f^{-1}(B_\rho(f(x_0),\varepsilon))$, 所以存在 $\delta>0$ 使得

$$B_d(x_0,\delta)\subset f^{-1}(B_\rho(f(x_0),\varepsilon)),$$

即
$$f(B_d(x_0,\delta))\subset B_\rho(f(x_0),\varepsilon)).$$

因此, 对任意的 $x\in X$, 若 $d(x,x_0)<\delta$, 则 $\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

（3）⇒（7）. 设（3）成立, 则对任意的 $B\subset Y$, $f^{-1}(\mathrm{cl}\,B)$ 是闭集, 且

$$f^{-1}(\mathrm{cl}\,B)\supset f^{-1}(B).$$

故 $f^{-1}(\mathrm{cl}\,B)\supset\mathrm{cl}\,f^{-1}(B)$.

（7）⇒（3）. 设（7）成立, 则对 Y 中任意的闭集 F, 有

$$f^{-1}(F)=f^{-1}(\mathrm{cl}\,F)\supset\mathrm{cl}\,f^{-1}(F)\supset f^{-1}(F).$$

故 $f^{-1}(F)=\mathrm{cl}\, f^{-1}(F)$，从而 $f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

（8）⇒（6）的证明留给读者.

最后我们证明（6）⇒（7）. 设（6）成立，$B\subset Y$，则 $f^{-1}(B)\subset X$，由（6）知

$$f(\mathrm{cl}\, f^{-1}(B))\subset \mathrm{cl}\, f(f^{-1}(B))\subset \mathrm{cl}\, B,$$

即 $\mathrm{cl}\, f^{-1}(B)\subset f^{-1}(\mathrm{cl}\, B)$.

证毕.

以上等价性最常用的是（1）⇔（2）⇔（3）⇔（4）⇔（8）.

注 2.4.1 虽然映射 $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ 连续的定义中利用了度量 d 和 ρ，但由上述定理知，f 是否连续仅与拓扑 $\mathcal{T}_d$ 和拓扑 $\mathcal{T}_\rho$ 有关，与具体的度量 d 与 ρ 无关. 也就是说，如果 d' 和 ρ' 分别是 X 和 Y 上的度量，且 $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_{d'}$，$\mathcal{T}_\rho=\mathcal{T}_{\rho'}$，则 $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ 连续当且仅当映射 $f:(X,d')\to(Y,\rho')$ 连续.

后面我们经常需要下面的定理.

定理 2.4.3（1）设 $f,g:X\to\mathbb{R}$ 是由度量空间 (X,d) 到 Euclidean 空间 $\mathbb{R}$ 的两个连续映射，则

$$\{x\in X: f(x)<g(x)\} \text{ 和 } \{x\in X: f(x)\leqslant g(x)\}$$

分别是 X 中的开集和闭集.

（2）设 $f,g:X\to Y$ 是由度量空间 (X,d) 到 (Y,ρ) 的两个连续映射，则

$$\{x\in X: f(x)\neq g(x)\} \text{ 和 } \{x\in X: f(x)=g(x)\}$$

分别是 X 中的开集和闭集.

证明（1）设 $x_0\in\{x\in X: f(x)<g(x)\}$，选择 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x_0)<a<g(x_0)$. 由于 f,g 是连续的，所以 $f^{-1}(-\infty,a)$ 和 $g^{-1}(a,+\infty)$ 是 X 中的开集，因此，它们的交也是开集. 所以，存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$B(x_0,\varepsilon)\subset f^{-1}(-\infty,a)\cap g^{-1}(a,+\infty)\subset\{x\in X: f(x)<g(x)\}.$$

于是，$\{x\in X: f(x)<g(x)\}$ 是 X 中的开集. 由于

$$\{x\in X: f(x\leqslant g(x)\}=X\setminus\{x\in X: f(x)>g(x)\},$$

所以 $\{x\in X: f(x)\leqslant g(x)\}$ 是 X 中的闭集.

（2）设 $U=\{x\in X: f(x)\neq g(x)\}$，则对任意的 $x\in U$，有 $\rho(f(x),g(x))=a>0$. 因此, $B_\rho\left(f(x),\frac{a}{2}\right)$和 $B_\rho\left(g(x),\frac{a}{2}\right)$ 分别是点 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (Y,ρ) 中的邻域, 且由（M3）知

$$B_\rho\left(f(x),\frac{a}{2}\right)\cap B_\rho\left(g(x),\frac{a}{2}\right)=\varnothing. \tag{2-4-1}$$

由于 f,g 是连续的, 由定理 2.4.2 知 $f^{-1}\left(B_\rho\left(f(x),\frac{a}{2}\right)\right)$ 和 $g^{-1}\left(B_\rho\left(g(x),\frac{a}{2}\right)\right)$ 都是 x 的邻域, 因此, 其交

$$V=f^{-1}\left(B_\rho\left(f(x),\frac{a}{2}\right)\right)\cap g^{-1}\left(B_\rho\left(g(x),\frac{a}{2}\right)\right)$$

也是点 x 的邻域. 由公式（2-4-1）知, $f(V)\cap g(V)=\varnothing$. 所以, $V\subset U$. 利用定理 2.2.8 知 U 是开集. 进一步, $\{x\in X: f(x)=g(x)\}=X\setminus U$ 是闭集. 证毕.

回忆一下, 对度量空间 (X,d) 和非空子集 A,

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a): a\in A\}.$$

我们有下面的定理.

定理 2.4.4 对任意的度量空间 (X,d) 和非空子集 A, 映射 $d(\cdot,A): X\to\mathbb{R}$ 是连续的. 特别地, 对任意的 $y\in X$, $d(\cdot,y)$ 是连续的. 由于 $d(\cdot,\varnothing)=+\infty$ 是常值映射, 所以也可以认为是连续的.

证明 为了证明 $d(\cdot,A): X\to\mathbb{R}$ 的连续性, 由连续映射的定义, 我们仅仅需要证明对任意的 $x,y\in X$，下式成立：

$$|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y). \tag{2-4-2}$$

由于对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $a\in A$ 使得 $d(y,A)+\varepsilon\geqslant d(y,a)$, 于是

$$d(x,A)-d(y,A)\leqslant d(x,a)-d(y,a)+\varepsilon\leqslant d(x,y)+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知

$$d(x,A)-d(y,A)\leqslant d(x,y).$$

同理，
$$d(y,A)-d(x,A)\leqslant d(x,y).$$
因此，式（2-4-2）成立．证毕．

定义 2.4.2 设 X，Y 是两个度量空间，$f:X\to Y$ 是映射，若对 X 中的任意开（闭）集 U，$f(U)$ 在 Y 中开（闭），则称 f 为由 X 到 Y 的**开（闭）映射**．

关于连续映射、开映射和闭映射，有下面有用而简单的定理，请读者自证．

定理 2.4.5 设 X,Y,Z 是度量空间，$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$ 是连续（开、闭）映射，则 $g\circ f:X\to Z$ 也是连续（开、闭）映射．

2.4.2 同胚及拓扑性质

下面引入同胚及拓扑性质的概念．

定义 2.4.3 设 (X,d) 与 (Y,ρ) 是度量空间，$f:X\to Y$ 是一一对应（即 f 既是单射也是满射），若 $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ 和 $f^{-1}:(Y,\rho)\to(X,d)$ 都是连续的（这里 $f^{-1}:Y\to X$ 表示 f 的逆映射），则称 f 是度量空间 (X,d) 到度量空间 (Y,ρ) 的一个**同胚映射**．如果 (X,d) 与 (Y,ρ) 之间存在同胚映射，则称 (X,d) 与 (Y,ρ) **同胚**．记作 $(X,d)\approx(Y,\rho)$ 或者 $X\approx Y$．

下面给出一些正面和反面的例子：

例 2.4.4 设 $(\mathbb{R},d)$ 是 Euclidean 空间，$((-1,1),d)$ 是通常度量空间，定义 $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ 为
$$f(x)=\frac{2}{\pi}\arctan x.$$
则 f 是 $(\mathbb{R},d)$ 到 $((-1,1),d)$ 的一个同胚映射．从而，$\mathbb{R}\approx(-1,1)$．

例 2.4.5 设 $a<b$，则 $((a,b),d)$ 与 $((0,1),d)$ 同胚．事实上，
$$f(x)=\frac{x-a}{b-a}$$
建立了两者之间的同胚．从而，$(a,b)\approx(0,1)$．显然，上述 f 也建立了闭区间 $[a,b]$ 到闭区间 $\mathbf{I}$ 之间的同胚．故，$[a,b]\approx\mathbf{I}$．

例 2.4.6 设 d, ρ 是集合 X 上的两个度量，若 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$，则 $\mathrm{id}_X : (X,d) \to (X,\rho)$ 是同胚映射.

例 2.4.7 设 d, ρ 是集合 X 上的两个度量，若 $\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_\rho$，则 $\mathrm{id}_X : (X,d) \to (X,\rho)$ 是开映射且是闭映射但不是连续映射，$\mathrm{id}_X : (X,\rho) \to (X,d)$ 是连续映射但既不是开映射也不是闭映射.

例 2.4.8 对于一维 Euclidean 空间 $(\mathbb{R},d)$ 和它的子集 (A,d)，定义 $j_A : A \to \mathbb{R}$ 为

$$j_A(x) = x.$$

则容易验证 j_A 总是连续的且 j_A 是开（闭）映射当且仅当 A 是 $(\mathbb{R},d)$ 的开（闭）集. 由此说明，连续的开映射可以不是闭映射；反之，连续的闭映射可以不是开映射.

显然有下面的定理，请读者自证.

定理 2.4.6 同胚关系是等价关系，即对任意度量空间 X, Y, Z，

（1） X 与 X 同胚；

（2） 若 X 与 Y 同胚，则 Y 与 X 也同胚；

（3） 若 X 与 Y 同胚且 Y 与 Z 同胚，则 X 与 Z 同胚.

定理 2.4.7 设 (X,d) 与 (Y,ρ) 是两个度量空间，$f : X \to Y$ 是一一对应，则下列条件等价：

（1） f 是同胚；

（2） f 是连续开映射；

（3） f 是连续闭映射.

定义 2.4.4 设 P 是一个性质，对于任意度量空间 X，若 X 具有性质 P，则与 X 同胚的所有空间都具有性质 P，这时称 P 为**同胚不变性质**或者**拓扑性质**.

我们也允许 P 为度量空间的子集与度量空间的相对位置，也可以允许 P 为子集的运算，甚至也可以是若干度量空间的相对关系等. 本书中主要研究度量空间的拓扑性质，但也包含一些非拓扑性质.

验证一个性质 P 是否是拓扑性质的简单而实用的方法是看此性质能否用开集及集合的运算等价地表示出来. 实际上，当我们证明了性质 P 可以用

开集及集合的运算来表示时，P 就是拓扑性质. 如果我们能给出两个同胚的空间，一个有性质 P，另一个没有性质 P，那么可以说明性质 P 不是拓扑性质. 依此法则，我们总结以前的概念以研究其是否是拓扑性质：

不是拓扑性质的有：度量 d，度量的有界性，集合的直径，集合的有界性，球形邻域.

是拓扑性质的有：开集，闭集，稠密集，无处稠密集，离散集，集合的闭包，内部，边界，序列是否收敛及它的极限，集族是否是基、子基，点的邻域及邻域基，映射是否连续，是否是开（闭）映射.

以后每给出一个概念，我们将指出其是否为拓扑性质.

练 习 2.4

2.4.A 设 (X,d) 是度量空间，$A \subset X$. 如果存在连续映射 $r: X \to X$ 使得 $r(X)=A$ 且对任意的 $x \in A$，$r(x)=x$，则称 A 是 X 的**收缩核**. 证明收缩核一定是闭子集.

2.4.B 设 (X,d)，(Y,ρ) 是度量空间，$\mathcal{B}$ 是 (X,d) 中的基. 证明映射 $f: X \to Y$ 是开映射当且仅当对任意的 $B \in \mathcal{B}$，$f(B)$ 在 (Y,ρ) 中开. 举例说明，上面结论中的基不能用子基代替.

2.4.C 设 $f,g: X \to Y$ 是由度量空间 (X,d) 到度量空间 (Y,ρ) 的两个连续映射，D 是 X 的稠密子集. 证明，如果 $f|D = g|D$，则 $f=g$.

2.4.D 设 (X,d)，(Y,ρ) 是度量空间. 证明映射 $f: X \to Y$ 是闭连续映射的充分必要条件是：对任意的 $A \subset X$，$\mathrm{cl}_Y f(A) = f(\mathrm{cl}_X A)$. 映射 $f: X \to Y$ 是开连续映射的充分必要条件是：对任意的 $A \subset X$，$f(\mathrm{int}_X(A)) \subset \mathrm{int}_Y(f(A))$. 举例说明开连续映射不能保证上面等式成立.

证明　连续映射 $f: X \to Y$ 是开映射的充分必要条件是：对任意的 $B \subset Y$，$\mathrm{cl}_X f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathrm{cl}_Y B)$，其也等价于，对任意的 $B \subset Y$，$\mathrm{int}_X(f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathrm{int}_Y(B))$，

2.4.E. 证明 $(0,1) \not\approx \mathbf{I}$.

2.4.F. 证明满射 $f: \quad \to \quad$ 是同胚当且仅当其为严格单调的连续映射.

2.5 一致连续、等距映射与等价映射

本节我们将定义一致连续、等距映射与等价映射等概念，并讨论它们的基本性质. 这是几个非拓扑性质，它们是度量空间特有的性质.

定义 2.5.1 设 (X,d) 与 (Y,ρ) 是两个度量空间，$f:X\to Y$ 是映射. 若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $x,y\in X$，若 $d(x,y)<\delta$，则

$$\rho(f(x),f(y))<\varepsilon,$$

这时称 f 是 (X,d) 到 (Y,ρ) 的**一致连续映射**.

如果 (X,d) 与 (Y,ρ) 分别是 Euclidean 空间 $(\mathbb{R}^n,d)$ 与 $(\mathbb{R},d)$，则此一致连续性与分析中的定义相同. 显然，一致连续的复合也是一致连续的. 一致连续的映射必是连续映射，但反之不真. 大家在数学分析中已经知道了大量反例，下面举例说明一致连续性的概念是非拓扑性质.

例 2.5.1 设 $X=(-1,1)$，$Y=\mathbb{R}$，定义 $d(x,y)=|x-y|$（在 X 与 Y 上），作 $f:X\to Y$ 为

$$f(x)=\tan\frac{\pi}{2}x,$$

则 $f:(X,d)\to(Y,d)$ 不是一致连续的.

现在我们在 X 上定义另一个度量 ρ 为

$$\rho(x,y)=\left|\tan\frac{\pi}{2}x-\tan\frac{\pi}{2}y\right|.$$

则 $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ 是一致连续的. 由于 $\mathcal{T}_\rho=\mathcal{T}_d$，故 $\mathrm{id}:(X,d)\to(X,\rho)$ 是同胚，由此说明 id 不保持一致连续性.

定义 2.5.2 设 (X,d) 与 (Y,ρ) 是两个度量空间，$f:X\to Y$ 是一一对应. 若对于任意的 $x,y\in X$，有

$$d(x,y)=\rho(f(x),f(y)),$$

则称 f 为度量空间 (X,d) 与 (Y,ρ) 的**等距映射**，此时称 (X,d) 与 (Y,ρ) 是两个

等距的度量空间.

显然, 等距映射一定是一致连续的, 等距关系是一个等价关系. 2.1 节中例 2.1.2 和例 2.1.3 给出了$\mathbb{R}^2$中的两个度量 d,ρ, 容易验证$\mathrm{id}:(\mathbb{R}^2,d)\to(\mathbb{R}^2,\rho)$是一致连续的, 但非等距映射.

本书中讨论的性质都是在等距映射下不变的性质, 最后我们定义等价度量的概念.

定义 2.5.3 设 d 与 ρ 是集合 X 上的两个度量, 若存在实数 $m, M>0$ 使得对任意的 $x,y\in X$ 有

$$m\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant M\rho(x,y),$$

则称 d 与 ρ 是 X 上的两个**等价度量**.

等价度量虽然可以不是等距映射, 但如果 d 与 ρ 是 X 上的两个等价度量, 那么, 度量空间 (X,d) 和 (X,ρ) 的各种性质几乎没有实质性不同, 而仅仅会有量的不同. 例如, 对于集合 $A\subset X$, A 在 (X,d) 和 (X,ρ) 上是否有界是等价的, 但是, 如果有界, A 在 (X,d) 和 (X,ρ) 上可以有不同的直径.

例 2.5.2 2.1 节中例 2.1.2 和例 2.1.3 给出的$\mathbb{R}^n$上的两个度量 d, ρ 是等价度量, 因为

$$\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant\sqrt{n}\rho(x,y).$$

以上三个概念对于同一集合 X 上的两个度量 d 和 ρ 而言有下面简单的事实:

若$\mathrm{id}:(X,d)\to(X,\rho)$是等距映射, 则必为等价度量; 若 d 与 ρ 为等价度量, 则 $\mathrm{id}:(X,d)\to(X,\rho)$ 和 $\mathrm{id}:(X,\rho)\to(X,d)$ 都是一致连续的, 从而 $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_\rho$. 但反之都不真. 前者的反例为上述例 2.1.2. 后者的反例如下.

例 2.5.3 令 $X=\mathbf{I}$, $d(x,y)=|x-y|$, $\rho(x,y)=|\sqrt{x}-\sqrt{y}|$,容易验证, d, ρ 为 X 上的两个度量. 进一步, $\mathrm{id}:(X,\rho)\to(X,d)$是一致连续的. 事实上, 对任意的 x, y, 有

$$d(x,y)=\rho(x,y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})\leqslant 2\rho(x,y).$$

故对任意的 $\varepsilon>0$, 令 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则当 $\rho(x,y)<\delta$ 时,

$$d(x,y)<\varepsilon,$$

所以 $\mathrm{id}:(X,\rho)\to(X,d)$ 是一致连续的. 又, 因为函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $\mathbf{I}$ 上按照数学分析中的定义是一致连续的, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意的 $x,y\in\mathbf{I}$, 当 $|x-y|<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon\text{, 即 }\rho(x,y)<\varepsilon.$$

由此说明 $\mathrm{id}:(\mathbf{I},d)\to(\mathbf{I},\rho)$ 是一致连续的. 但不存在 $m>0$ 使得 $m\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$ 对任意的 $x,y\in\mathbf{I}$ 成立. 事实上, 对任意的 $m>0$, 选择 $n\in$¥ 使得 $\frac{2}{n}<m$, 令 $x=\frac{1}{n^2}$, $y=\frac{1}{(n+1)^2}$, 则

$$\rho(x,y)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)},$$

$$d(x,y)=\left|\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right|=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\leqslant\frac{2}{n^2(n+1)}.$$

故

$$\frac{d(x,y)}{\rho(x,y)}\leqslant\frac{2}{n}<m,$$

所以 $m\rho(x,y)>d(x,y)$.

练 习 2.5

2.5.A. 证明两个离散空间 X 和 Y 是等距的充分必要条件是 $|X|=|Y|$.

2.5.B 探讨练习 2.1.B 中给出的¡ 上的度量和通常度量是等价的条件.

2.5.C 分别探讨 (X,d) 和 $(X,\overline{d})$ 是等距和等价的条件.

2.6 度量空间的运算

所谓度量空间的运算就是由一些度量空间生成一个（或几个）新的度量空间. 本节中仅考虑子空间、和空间及可数乘积运算, 以后我们将考虑其

他运算.

定义 2.6.1 设 $r(X,d)$ 是度量空间, $\varnothing \neq Y \subset X$, 则 $d|Y\times Y : Y\times Y \to \mathbb{R}$ 是 Y 中的度量, 称 $(Y,d|Y\times Y)$ 是 (X,d) 的**子空间**. 以后, 为了简单起见, 也记 $d|Y\times Y$ 为 d.

关于子空间有下面简单的事实.

定理 2.6.1 设 (Y,d) 是 (X,d) 的子空间, 则:

(1) $V\subset Y$ 是 Y 中的开集当且仅当存在 X 中的开集 U 使得

$$V = U\cap Y.$$

(2) $E\subset Y$ 是 Y 中的闭集当且仅当存在 X 中的闭集 F 使得

$$E = F\cap Y.$$

(3) 对任意的 $A\subset Y$, 用 $\mathrm{cl}_Y A$ 和 $\mathrm{cl}_X A$ 分别表示 A 在 Y 与 X 中的闭包, 则

$$\mathrm{cl}_Y A = \mathrm{cl}_X A\cap Y.$$

证明 我们证明 (1) 和 (3), (2) 的证明留给读者.

(1) 设 $V\subset Y$, 若 V 在 (Y,d) 中是开集, 则对任意的 $y_0\in V$, 存在 $\varepsilon_{y_0}>0$ 使得

$$\{y\in Y : d(y,y_0)<\varepsilon_{y_0}\}\subset V.$$

令

$$U=\bigcup_{y_0\in V}\{x\in X : d(x,y_0)<\varepsilon_{y_0}\}.$$

则 U 是 (X,d) 中的一族球之并, 因此 U 为 (X,d) 中的开集, 而且

$$\begin{aligned}U\cap Y &= \bigcup_{y_0\in V}\{x\in X : d(x,y_0)<\varepsilon_{y_0}\}\cap Y\\ &= \bigcup_{y_0\in V}\{x\in Y : d(x,y_0)<\varepsilon_{y_0}\}\\ &= V.\end{aligned}$$

反之, 若存在 (X,d) 中的开集 U 使得 $V=U\cap Y$, 则对任意的 $y\in U\cap Y$, 存在 $\varepsilon_y>0$, 使得 $\{x\in X : d(x,y)<\varepsilon_y\}\subset U$. 那么,

$$y\in Y\cap\{x\in X : d(x,y)<\varepsilon_y\}\subset Y\cap U.$$



于是,

$$Y \cap U = \bigcup_{y \in U \cap Y} Y \cap \{x \in X : d(x,y) < \varepsilon_y\}$$
$$= \bigcup_{y \in Y \cap U} \{x \in Y : d(x,y) < \varepsilon_y\}.$$

即 $Y \cap U$ 是 Y 中的一族球之并, 因此 $Y \cap U$ 为 Y 的开集.

(3) 设 $x \in X$, 则由 (1) 知

$x \in \mathrm{cl}_Y A \Leftrightarrow x \in Y$ 且对 Y 中的任意开集 V, 若 $V \ni x$, 则 $V \cap A \neq \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in Y$ 且对 X 中的任意开集 U, 若 $U \ni x$, 则 $(U \cap Y) \cap A \neq \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in Y$ 且对 X 中的任意开集 U, 若 $U \ni x$, 则 $U \cap A \neq \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in Y$ 且 $x \in \mathrm{cl}_X A$

$\Leftrightarrow x \in Y \cap \mathrm{cl}_X A$

证毕.

注 2.6.1 关于内部运算和边界运算, 我们并没有类似上述定理中 (3) 的结论, 只能说, 对于 $A \subset Y$, A 在 Y 中的内部包含 A 在 X 中的内部. 例如, 令 $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$, $A = \mathbf{I} \times \{0\}$, d 为 $\mathbb{R}^2$ 上的 Euclidean 度量, 则 A 在 X 中的内部为空集, 而 A 在 Y 中的内部为 $(0,1) \times \{0\}$. 边界的情况将更为复杂.

下面给出的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间是我们经常用到的.

例 2.6.1 定义 $\mathbb{R}^n$ 的子空间:

n 维球体: $\mathbf{B}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}$;

n 维方体: $\mathbf{J}^n = [-1,1]^n$;

n 维单位方体: $\mathbf{I}^n = [0,1]^n$;

$n-1$ 维球面: $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$.

另外, 对任意的 $m < n$, $\mathbb{R}^m \times \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{n-m}$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间且显然与 $\mathbb{R}^m$ 等距同构, 有时也直接说 $\mathbb{R}^m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 另外, $\mathbb{S}^0 = \{-1,1\}$ 是有定义的.

下面的定理说明子空间的拓扑仅与大空间的拓扑有关, 而与大空间的度量无关.

定理 2.6.2 设 $\varnothing \neq Y \subset X$, d, ρ 是 X 上的两个度量, 且 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$, 则 $\mathcal{T}_{d|Y} = \mathcal{T}_{\rho|Y}$.

这个定理是上述定理 2.6.1（1）的推论. 证明略.

在考虑度量空间的子空间时，我们经常用 $\mathcal{T}_X$ 和 $\mathcal{T}_Y$ 分别表示度量空间 (X,d) 和 (Y,ρ) 的全体开集之集，即 $\mathcal{T}_X=\mathcal{T}_d$，$\mathcal{T}_Y=\mathcal{T}_\rho$. 下面再给出子空间的几个性质.

定理 2.6.3（1）设 $\mathcal{B}$ 是 (X,d) 的（子）基，(Y,d) 是 (X,d) 的子空间，则 $\mathcal{B}\,|\,Y=\{B\cap Y:B\in\mathcal{B}\}$ 是 (Y,d) 的（子）基.

（2）设 (Y,d) 是 (X,d) 的子空间，$y\in Y$，则 $\mathcal{N}(y)\,|\,Y=\{U\cap Y:U\in\mathcal{N}(y)\}$ 是 y 在子空间 (Y,d) 中的邻域全体. 若 $\mathcal{B}_X(y)$ 是 y 点在空间 X 中的一个邻域基，则 $\mathcal{B}_X(y)\,|\,Y$ 是 y 点在子空间 Y 中的一个邻域基.

（3）设 (Y,d) 是 (X,d) 的子空间，且 Y 是 (X,d) 的离散子集，则 $\mathcal{T}_{(Y,d)}=\mathcal{T}_{(Y,\rho)}=P(Y)$，这里，$\rho$ 是 Y 上的离散度量.

请读者自证.

定义 2.6.2 设 (X,d) 是度量空间，U 是开（闭）子集，则称 (U,d) 为 (X,d) 的**开子空间（闭子空间）**.

上面例子中的 n 维球体 $\mathbf{B}^n$，n 维方体 $\mathbf{J}^n=[-1,1]^n$，n 维单位方体 $\mathbf{I}^n=[0,1]^n$，$n-1$ 维球面 $\mathbb{S}^{n-1}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子空间；对任意的 $m<n$，$\mathbb{R}^m\times\underbrace{\{0\}\times\cdots\times\{0\}}_{n-m}$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子空间. $(0,1)^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子空间. 但对任意的 $m<n$，$(0,1)^m\times\underbrace{\{0\}\times\cdots\times\{0\}}_{n-m}$ 不是 $\mathbb{R}^n$ 的开子空间，也不是闭子空间.

例 2.4.8 可以推广到一般情况. 设 A 是度量空间 (X,d) 的子空间，我们可以定义 $j_A:A\to X$ 为

$$j_A(x)=x,$$

称之为由 A 到 X 的**嵌入映射**. 容易验证，j_A 是连续的；而 j_A 是开（闭）映射当且仅当 A 是 X 的开（闭）子空间. 从而，对任意的度量空间 (Y,ρ) 及连续映射 $f:X\to Y$，$f\,|\,A=f\circ j_A:A\to Y$ 连续. 对于度量空间 (Y,ρ) 及其子空间 B，度量空间 (X,d) 及映射 $f:X\to B$，由定理 2.4.5 容易验证，映射 $f:X\to B$ 连续当且仅当映射 $j_B\circ f:X\to Y$ 是连续的. 在今后大多数情况下，映射 $j_B\circ f:X\to Y$ 也被写为 $f:X\to Y$. 所以映射 $f:X\to B$ 的连续性和映射 $f:X\to Y$ 的连续性是等价的. 进一步，如果映射 $j_B\circ f=f:X\to Y$ 是开

（闭）映射，那么 $f:X\to B$ 也是开（闭）映射，但是其逆并不成立. 例如，$\mathrm{id}_A:A\to A$ 是开映射也是闭映射，但是 $j_A\circ\mathrm{id}_A:A\to X$ 可能既不是开映射也不是闭映射. 最后，我们引入下面的定义.

定义 2.6.3 设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是度量空间，$f:X\to Y$ 是单射，如果 $f:X\to f(X)$ 是同胚映射（等距映射），则称 $f:X\to Y$ 是**同胚嵌入（等距嵌入）**. 当 $f(X)$ 是 Y 的开（闭）集时，称 $f:X\to Y$ 是**开（闭）同胚嵌入（开（闭）等距嵌入）**.

注 2.6.2 连续的单射不一定是同胚嵌入. 例如，设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_\infty\}$ 是可数的离散空间，考虑映射 $f:X\to\mathbb{R}$ 为 $f(x_n)=\dfrac{1}{n}$，$f(x_\infty)=0$，那么，f 是连续的单射但不是同胚嵌入.

定理 2.6.4 设 Y 是度量空间 X 的开子空间，$A\subset X$. 如果 A 是 X 的稠密（无处稠密）集，那么 $A\cap Y$ 是 Y 的稠密（无处稠密）集.

请读者自证.

定理 2.6.4 说明子空间 Y 中的每一个开（闭）集 B 一定可以写成大空间 X 中的一个开（闭）集 A 与 Y 之交. 但满足条件的 A 并不是唯一的，随意的选择会导致整体性质差. 下面的定理给出了一种自然选择，这种选择有良好的整体性质.

定理 2.6.5 设 (Y,d) 是度量空间 (X,d) 的子空间.

(1) 存在映射 $\varphi:\mathcal{T}_Y\to\mathcal{T}_X$ 使得

(i) $\varphi(Y)=X$，$\varphi(\varnothing)=\varnothing$；

(ii) 对任意 $B\in\mathcal{T}_Y$，$\varphi(B)\cap Y=B$；

(iii) 如果 $A,B\in\mathcal{T}_Y$ 且 $A\subset B$，则 $\varphi(A)\subset\varphi(B)$；

(iv) 对任意的 $A,B\in\mathcal{T}_Y$，$\varphi(A\cap B)=\varphi(A)\cap\varphi(B)$.

(2) 存在映射 $\psi:\mathcal{F}_Y\to\mathcal{F}_X$，这里 $\mathcal{F}_Y,\mathcal{F}_X$ 分别表示 (X,d) 和 (Y,d) 的闭集全体，使得

(i) $\psi(Y)=X$，$\psi(\varnothing)=\varnothing$；

(ii) 对任意 $B\in\mathcal{F}_Y$，$\psi(B)\cap Y=B$；

(iii) 如果 $A,B\in\mathcal{F}_Y$ 且 $A\subset B$，则 $\psi(A)\subset\psi(B)$；

(iv) 对任意的 $A,B\in\mathcal{F}_Y$，$\psi(A\cup B)=\psi(A)\cup\psi(B)$.

证明 (1) 对任意 $B \in \mathcal{T}_Y$, 令

$$\varphi(B) = \{x \in X : d(x,B) < d(x, Y \setminus B)\}.$$

如图 2-4 所示.

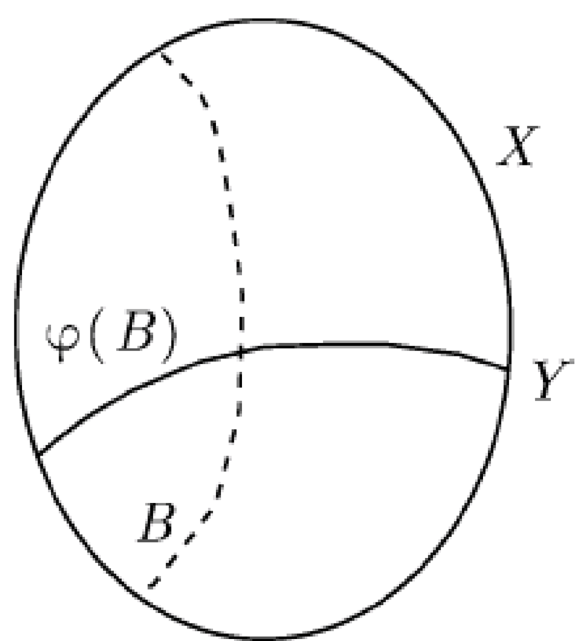


图 2-4 $\varphi(x)$ 的定义

由定理 2.4.3 和定理 2.4.4 知 $\varphi(B) \in \mathcal{T}_X$. 现在我们证明 $\varphi : \mathcal{T}_Y \to \mathcal{T}_X$ 满足 (1) 中的 (i) 至 (iv).

由于 $d(x,\varnothing) = +\infty$, 故 (i) 成立.

显然, (i) 成立也说明了当 $B \in \{\varnothing, Y\}$ 时, (ii) 成立. 因此, 为证明 (ii), 设 $B \in \mathcal{T}_Y \setminus \{\varnothing, Y\}$. 对任意的 $y \in B$, 由于 B 是 (Y,d) 中的开集, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\{z \in Y : d(z,y) < \varepsilon\} \subset B.$$

因此,

$$d(y,B) = 0 < \varepsilon \leqslant d(y, Y \setminus B).$$

所以, $y \in \varphi(B)$. 这说明

$$B \subset \varphi(B) \cap Y.$$

另一方面, 设 $y \in Y \setminus B$, 则 $d(y, Y \setminus B) = 0$. 因此, $d(y,B) < d(y, Y \setminus B)$ 不能成立. 所以, $y \notin \varphi(B)$. 这说明

$$\varphi(B) \cap Y \subset B.$$

故 (ii) 成立.

由定义, 对任意的 $A, B \subset X$ 及 $x \in X$, 如果 $A \subset B$, 那么

$$d(x,A) \geqslant d(x,B).$$

由此, 我们知道 (iii) 成立.

最后, 我们证明 (iv) 成立. 对任意的 $A, B \in \mathcal{T}_Y$, 由 (iii) 知

$$\varphi(A \cap B) \subset \varphi(A) \cap \varphi(B).$$

反之，设 $x\in\varphi(A)\cap\varphi(B)$，同时，不妨设 $d(x,Y\setminus A)\leqslant d(x,Y\setminus B)$. 则

$$d(x,A)<d(x,Y\setminus A)\leqslant d(x,Y\setminus B).$$

令 $\varepsilon=d(x,Y\setminus A)-d(x,A)>0$. 由定义，存在 $a\in A$ 使得

$$d(x,a)<d(x,A)+\varepsilon=d(x,Y\setminus A)\leqslant d(x,Y\setminus B).$$

由此说明 $a\notin Y\setminus B$. 所以，$a\in A\cap B$. 故

$$d(x,A\cap B)\leqslant d(x,a)<d(x,Y\setminus A)=d(x,Y\setminus(A\cap B)).$$

最后一个等号成立的原因是

$$\begin{aligned}&d(x,Y\setminus(A\cap B))\\&=d(x,(Y\setminus A)\cup(Y\setminus B))\\&=\inf\{d(x,c):c\in(Y\setminus A)\cup(Y\setminus B)\}\\&=\min\{\inf\{d(x,c):c\in Y\setminus A\},\inf\{d(x,c):c\in Y\setminus B\}\}\\&=\min\{d(x,Y\setminus A),d(x,Y\setminus B)\}\\&=d(x,Y\setminus A)\end{aligned}$$

所以，$x\in\varphi(A\cap B)$. 因此，

$$\varphi(A)\cap\varphi(B)\subset\varphi(A\cap B).$$

（2）对任意的 $B\in\mathcal{T}_Y$，令

$$\psi(B)=X\setminus\varphi(Y\setminus B).$$

利用（1），我们知道 $\psi:\mathcal{F}_Y\to\mathcal{F}_X$ 满足（2）中的（i）至（iv）. 另外，读者不难看出

$$\psi(B)=\{x\in X:d(x,B)\leqslant d(x,Y\setminus B)\}.$$

证毕.

注 2.6.3 在上面定理的证明中定义的映射 $\varphi:\mathcal{T}_Y\to\mathcal{T}_X$ 未必满足

$$\varphi(A\cup B)=\varphi(A)\cup\varphi(B).$$

因此，$\psi:\mathcal{T}_Y\to\mathcal{T}_X$ 未必满足

$$\varphi(A\cap B)=\varphi(A)\cap\varphi(B).$$

例如，令 $X=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$，$Y=\{(x,y)\in X:y=0\}$，且赋予 Euclidean $\mathbb{R}^2$ 的子空间度量. 再令 $A=\{(x,0)\in Y:x>0\}$，$B=\{(x,0)\in Y:x<0\}$，那么

$$\varphi(A)=\{(x,y)\in X:x>0\},\varphi(B)=\{(x,y)\in X:x<0\}.$$

因此，

$$\varphi(A)\cup\varphi(B)=\{(x,y)\in X:x\neq 0\}\neq X=\varphi(Y)=\varphi(A\cup B).$$

我们定义的第二个拓扑运算是（有限）乘积运算.

定义 2.6.4 设 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 是度量空间，定义 $d:(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\times(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\to\mathbb{R}^+$ 为

$$d((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n))=\sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2+(d_2(x_2,y_2))^2+\cdots+(d_n(x_n,y_n))^2},$$

则 d 是 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的一个度量，称之为 **Euclidean 乘积度量**. 此时称 $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,d)$ 为 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 的 **Euclidean 乘积度量空间**. 另外，定义 $\rho:(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\times(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\to\mathbb{R}^+$ 为

$$\rho((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n))=\max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2),\cdots,d_n(x_n,y_n)\}.$$

则 ρ 也是 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 上的一个度量，称之为**最大值乘积度量**，称 $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,\rho)$ 为 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 的**最大值乘积度量空间**.

定理 2.6.6 设 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 是 n 个度量空间，则对任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$，有

$$\begin{aligned}\rho((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n))&\leqslant d((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n))\\&\leqslant\sqrt{n}\rho((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)).\end{aligned}$$

请读者自证.

由此可知，d 和 ρ 是 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 上的等价度量，从而 $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_\rho$. 因此，对拓扑性质而言，$d$ 和 ρ 并无区别. 因此，今后我们可以用 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 表示这两个度量空间中的任一个，统称为**乘积度量空间**. 由它们导出的开集全体称为**乘积拓扑**. 每一个 (X_i,d_i) 称为这个乘积空间的**因子空间**. 当所有的 (X_i,d_i) 都等于 (X,d) 时，我们用 $(X,d)^n$ 记 $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,d)$ 或者 $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,\rho)$. 如果没有必要说明度量 d，$(X,d)^n$ 也简记为 X^n.



设 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 是度量空间. 对任意的 $i\leqslant n$ 及任意固定的点 $x^0=(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)\in X_1\times\cdots\times X_{i-1}\times X_{i+1}\times\cdots\times X_n$，我们能够定义映射 $j_i:X_i\to X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 为：对任意的 $x_i\in X_i$，

$$j_i(x_i)=(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0).$$

显然, 不论 X 上取 Euclidean 乘积度量还是最大值乘积度量, j_i 都是等距嵌入, 所以, 作为 X 的子空间, $j_i(X_i)$ 具有 X_i 的一切性质. 今后, 我们将不加说明地利用这个结果.

例如, $\mathbb{R}^n$ 上的 Euclidean 度量刚好为 $\mathbb{R}$ 的 Euclidean 度量的 Euclidean 乘积. $\mathbf{I}^n$, $\mathbf{J}^n$ 也分别是 $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ 的 Euclidean 度量乘积. 但是, $\mathbf{B}^n$ 并不是 $\mathbf{B}^1$ 的 Euclidean 度量乘积, 但它们是同胚的（为什么？）, 而 $\mathbb{S}^{n-1}$ 不是 $n-1$ 个 $\mathbb{S}^1$ 的 Euclidean 度量乘积, 甚至它们都不是同胚的. 例如, 当 $n=3$ 时, $\mathbb{S}^2=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ 是普通球面, $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ 同胚于环面（像轮胎）时, $\mathbb{S}^2$ 和 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ 不是同胚的, 证明比较困难, 此处略.

定理 2.6.7 设 $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\cdots,\mathcal{B}_n$ 分别是度量空间 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 的基, 定义

$$\mathcal{B}=\{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n:U_i\in\mathcal{B}_i,i=1,2,\cdots,n\}.$$

则 $\mathcal{B}$ 是 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的基.

证明 由于 $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_\rho$, 我们用 ρ 证明. 首先证明任意 $U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\in\mathcal{B}$ 是 $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,\rho)$ 中的开集. 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U$，对任意的 $i\leqslant n$，存在 $\varepsilon_i>0$ 使得

$$x_i\in B_{d_i}(x_i,\varepsilon_i)\subset U_i.$$

令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}>0$, 则

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B_{d_1}(x_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(x_2,\varepsilon)\times\cdots\times B_{d_n}(x_n,\varepsilon)\subset U.$$

由 ρ 的定义容易验证,

$$B_\rho((x_1,x_2,\cdots,x_n),\varepsilon)=B_{d_1}(x_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(x_2,\varepsilon)\times\cdots\times B_{d_n}(x_n,\varepsilon).$$

由上面两式可推出

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B_p((x_1,x_2,\cdots,x_n),\varepsilon)\subset U\,.$$

因此 U 为 $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,\rho)$ 中的开集.

下面用定理 2.2.7 证明 $\mathcal{B}$ 是 $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,\rho)$ 的基. 设 U 是乘积空间中的开集, 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U$, 则存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$B_\rho((x_1,x_2,\cdots,x_n),\varepsilon)=B_{d_1}(x_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(x_2,\varepsilon)\times\cdots\times B_{d_n}(x_n,\varepsilon)\subset U\,.$$

由于 $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\cdots\mathcal{B}_n$ 分别是 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 的基, 故对任意的 $i\leqslant n$, 存在 $U_i\in\mathcal{B}_i$ 使得 $x_i\in U_i\subset B_{d_i}(x_i,\varepsilon)$.则

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,\cdots,x_n)&\in U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\\&\subset B_{d_1}(x_1,\varepsilon)\times B_{d_2}(x_2,\varepsilon)\times\cdots\times B_{d_n}(x_n,\varepsilon)\\&\subset U.\end{aligned}$$

因为 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\in\mathcal{B}$, 我们知道 $\mathcal{B}$ 为 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的基. 证毕.

推论 2.6.1 设 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 是度量空间, 则

$$\mathcal{B}=\{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n:U_i\text{ 在 }X_i\text{ 中开},i=1,2,\cdots,n\}$$

是 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的基. 这个基称为 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的标准基.

注意, 推论 2.6.1 中定义的 $\mathcal{B}$ 一般并不是空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的开集全体.

推论 2.6.2 设对于 $i\leqslant n, d_i,\rho_i$ 分别是集合 X_i 的两个度量, 且 $\mathcal{T}_{d_i}=\mathcal{T}_{\rho_i}$, 则由 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 和 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ 在 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 中导出的乘积拓扑相同.

推论 2.6.3 设 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 是度量空间, 对任意的 $i\leqslant n$, $A_i\subset X_i$, 那么,

$$\mathrm{cl}\prod_{i=1}^{n}A_i=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{cl}\,A_i,\ \mathrm{int}\prod_{i=1}^{n}A_i=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{int}\,A_i\,.$$

即有限个离散子集的乘积是离散子集; 稠密集的乘积是稠密的. 如果存在 $i\leqslant n$ 使得 A_i 是 X_i 的无处稠密集, 那么 $\prod_{i=1}^{n}A_i$ 是 $\prod_{i=1}^{n}X_i$ 的无处稠密集.

请读者自证.

注意，由于 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 中的所有子集并非都是乘积形状的，所以，我们并不能从上面的推论中把乘积空间中所有子集的闭包和内部用因子空间的闭包和内部表示出来.

设 $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 是度量空间，$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是其乘积空间，在 1.4 节中，对任意的 $i\leqslant n$，我们定义了投影映射 $p_i:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to X_i$ 为

$$p_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_i\,.$$

容易证明，对 $A_i\subset X_i$，

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\bigcap_{i=1}^{n}p_i^{-1}(A_i)\,.$$

利用定理 2.6.7，习题 2.4.B 和连续映射的等价性，读者容易证明下述结论.

定理 2.6.8 每一个 $p_i:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to X_i$ 是连续的开满映射.

但一般来说，投影映射并不是闭映射. 例如，令 $X_1=X_2=\mathbb{R}$，

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}:xy=1\text{ 且 }x,y>0\}\,.$$

则 A 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集，但 $p_1(A)=(0,+\infty)$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

关于投影映射 p_i 有下面进一步的结果.

定理 2.6.9 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y$ 是度量空间，$f:Y\to X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是映射，则 f 连续当且仅当对任意的 $i\leqslant n$，$p_i\circ f:Y\to X_i$ 连续.

证明 必要性是显然的. 现在证明设对任意的 $i\leqslant n$，$p_i\circ f:Y\to X_i$ 连续. 对任意的 $i\leqslant n$，设 U_i 是 X_i 中的开集，那么

$$f^{-1}(U_1\times U_2\times\cdots\times U_n)=f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n}p_i^{-1}(U_i)\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(p_i\circ f)^{-1}(U_i)\,.$$

由假设，对任意的 i，$(p_i\circ f)^{-1}(U_i)$ 是 Y 中的开集，故 $f^{-1}(U_1\times U_2\times\cdots\times U_n)$ 也是 Y 中的开集. 故由推论 2.6.1 及定理 2.4.2 中（1）$\Leftrightarrow$（4）可知，$f:Y\to X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是连续的. 证毕.

此定理今后将经常用到.

我们也可以将有限乘积推广到可数无限乘积. 首先，上述定义的 d 和 ρ 都不可行，因为它们的值域可能不在 $\mathbb{R}^+$ 中. 但如果仅仅为了讨论拓扑问题

（这是本书的主要目的），我们可以用以下方法.

设 $((X_n,d_n))_{n=1}^{\infty}$ 是一列度量空间，对于每一个 n，令 $\overline{d}_n$ 是 d_n 的标准有界化度量. 对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots),\ y=(y_1,y_2,\cdots)\in X_1\times X_2\times\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$，令

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\overline{d}_n(x_n,y_n),$$

则 $\left(\prod_{n=1}^{\infty}X_n,d\right)$ 是一个度量空间，称之为 $((X_n,d_n))_{n=1}^{\infty}$ 的**可数乘积度量空间**. 由此度量导出的拓扑称为**乘积拓扑**. 每一个 (X_n,d_n) 称为乘积拓扑空间 $\left(\prod_{n=1}^{\infty}X_n,d\right)$ 的**因子空间**. 当所有的 (X_n,d_n) 都等于 (X,d) 时，我们用 $(X,d)^{¥}$ 或者 $X^{¥}$ 记 $\left(\prod_{n=1}^{\infty}X_n,d\right)$.

关于可数乘积度量空间，上述三个定理的对应结论是：

定理 2.6.10 设 $((X_n,d_n))_{n=1}^{\infty}$ 是一列度量空间，$\mathcal{B}_n$ 是 (X_n,d_n) 的基，则

$$\mathcal{B}=\left\{U_1\times U_2\times\cdots\times U_i\times\prod_{n=i+1}^{\infty}X_n : j\leqslant i\text{ 时，}U_j\in\mathcal{B}_j;i=1,2,\cdots\right\}$$

是 $\left(\prod_{n=1}^{\infty}X_n,d\right)$ 的一个基. 如果令每一个 $\mathcal{B}_n$ 是 $((X_n,d_n))$ 的全体开集，那么上面定义的 $\mathcal{B}$ 称为乘积空间 $\left(\prod_{n=1}^{\infty}X_n,d\right)$ 的**标准基**.

证明 不妨假定 $\overline{d}_n=d_n$（为什么？）. 首先，$\mathcal{B}$ 中每一个成员都是 $\left(\prod_{n=1}^{\infty}X_n,d\right)$ 中的开集，证明同定理 2.6.7，略去. 现在设 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$，$\varepsilon>0$，选择 i 充分大使得 $\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}$，则容易证明

$$x\in B_{d_1}\left(x_1,\frac{\varepsilon}{2}\right)\times B_{d_2}\left(x_2,\frac{\varepsilon}{2}\right)\times\cdots\times B_{d_i}\left(x_i,\frac{\varepsilon}{2}\right)\times\prod_{n=i+1}^{\infty}X_n\subset B_d(x,\varepsilon).$$

进一步，对任意的 $j\leqslant i$，选择 $U_j\in\mathcal{B}_j$ 使得

$$x_j \in U_j \subset B_{d_j}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

则
$$x \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_i \times \prod_{n=i+1}^{\infty} X_n \subset B_d(x, \varepsilon),$$

且
$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_i \times \prod_{n=i+1}^{\infty} X_n \in \mathcal{B}.$$

由定理 2.2.6 和定理 2.2.7 可说明 $\mathcal{B}$ 为 $\left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, d\right)$ 的基. 证毕.

推论 2.6.4 设 $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \cdots$ 是度量空间，对任意的 n, $A_n \subset X_n$，那么，

$$\mathrm{cl} \prod_{n=1}^{\infty} A_n = \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}\, A_n.$$

稠密集的无限乘积是稠密的. 如果存在 n 使得 A_n 是 X_n 的无处稠密集，那么 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 是 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 的无处稠密集.

注 2.6.4 一般来说，

$$\mathrm{int}\left(\prod_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{int}\, A_i.$$

即可数无限个离散子集的乘积未必是离散的.

同样，对于投影映射 $p_n : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to X_n$，

$$p_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = x_n.$$

我们有下面相应的定理成立.

定理 2.6.11 $p_n : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to X_n$ 是连续的开满映射.

请读者自证.

定理 2.6.12 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$; Y 是度量空间，$f : Y \to \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 是一个映射，则 f 连续当且仅当对任意的 n，$p_n \circ f : Y \to X_n$ 是连续的.

请读者自证.

在 1.4 节，我们曾经指出，对于任意的集合 Y，Y 到 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 和映射族 $\{f_n:Y\to X_n\}_{n\in¥}$ 互相唯一确定. 由定理 2.6.12，有下面的推论.

推论 2.6.5 设 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 是乘积空间，Y 是度量空间，则由 Y 到 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 的连续映射和连续映射族 $\{f_n:Y\to X_n\}_{n\in¥}$ 互相唯一确定，也即，它们之间可以建立自然的一一对应.

我们也有下面的推论.

推论 2.6.6 设 $(x(k)=(x(k)_n)_n)_k$ 是乘积空间 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 的一个序列，$x=(x_n)_n\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$，则 $x(k)\to x(k\to\infty)$ 当且仅当对任意的 n, $x(k)_n\to x_n(k\to\infty)$.

证明 定义 $Y=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,0\right\}$，则作为¡ 的子空间，$Y$ 是仅含一个非孤立点 0 的度量空间. 定义 $f:Y\to\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 为

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=x(k),\ \ f(0)=x,$$

则 $x(k)\to x$ 当且仅当 $f:Y\to\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 是连续的，当且仅当对任意的 n, $p_n\circ f:Y\to X_n$ 是连续的，当且仅当对任意的 n, $x(k)_n\to x_n$. 证毕.

例 2.6.2 $Q=\mathbf{J}^{?}$,¡ 和 $\{0,1\}^{¥}$ 分别是无限可数多个 $\mathbf{J}$,¡ 和两点集 $\{0,1\}$ 的乘积，$\{0,1\}^{¥}$ 是离散空间吗？

也许你会疑惑为什么我们没有仿照有限乘积的 ρ 定义无限乘积. 也就是说，如果 $((X_n,d_n))_{n=1}^{\infty}$ 是一列度量空间，在 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 上定义度量：

$$\rho((x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots))=\sup\{\overline{d_n}(x_n,y_n):n=1,2,\cdots\}.$$

容易验证，ρ 确实是集合 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 上的度量，称之为**上确界度量**. 但是，我们要注意的是，一般来讲，$T_d\neq T_\rho$. 例如，取 $X_n=\mathbf{I}$，那么，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)^{¥}$ 是 $(\mathbf{I}^{¥},\rho)$ 的开集，但不是 $(\mathbf{I}^{¥},d)$ 的开集. 今后，当讨论乘积空间时，我们总是指 d.



下面考虑 Hilbert 空间 ℓ^2 中的序列收敛问题. 对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)\in\ell^2$，令

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2}\ .$$

称之为 x 的**范数**. 关于范数的系统讨论见一般的泛函分析教材, 例如, 文献[15]和[19]. 注意到作为集合 $\ell^2\subset$¡ ¥，按照我们分别给出的 ℓ^2 和¡ ¥ 的度量, Hilbert 空间 ℓ^2 并不是¡ ¥ 的子空间, 对于 ℓ^2 中的序列, 在 Hilbert 空间 ℓ^2 和在¡ ¥ 中的收敛也是不相同的. 我们先证明下面的结论.

定理 2.6.13 设 $(x(k)=(x(k)_n)_n)_k$ 是 Hilbert 空间 ℓ^2 的一个序列, $x=(x_n)_n\in\ell^2$. 则 $\lim\limits_{k\to\infty}x(k)=x$ 当且仅当 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x(k)\|=\|x\|$，且对任意的 n, $\lim\limits_{k\to\infty}x(k)_n=x_n$.

证明 注意到

$$|\|x(k)\|-\|x\||=|d(x(k),0)-d(x,0)|\leqslant d(x(k),x),$$

且对任意的 n,

$$|x(k)_n-x_n|\leqslant d(x(k),x),$$

我们立即得知定理中的条件是必要的. 现在我们证明这个条件也是充分的. 为此, 设定理的条件成立, 我们证明 $\lim\limits_{k\to\infty}x(k)=x$.

对任意的 $\varepsilon>0$, 选择 $N\in$¥ 使得

$$0\leqslant\|x\|^2-\sum_{n=1}^{N}x_n^2\leqslant\frac{\varepsilon}{24}.$$

对此 N, 选择 $K\in$¥ 使得对任意的 $k\geqslant K$,

$$|\|x(k)\|^2-\|x\|^2|<\frac{\varepsilon}{24},$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N}((x(k)_n)^2-x_n^2)\right|<\frac{\varepsilon}{24} \text{ 且 } \sum_{n=1}^{N}(x(k)_n-x_n)^2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

那么, 对任意的 $k\geqslant K$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{\infty}(x(k)_n)^2 &= \|x(k)\|^2 - \sum_{n=1}^{N}(x(k)_n)^2 \\
&= \|x(k)\|^2 - \sum_{n=1}^{N}((x(k)_n)^2 - x_n^2) - \sum_{n=1}^{N}x_n^2 \\
&= \|x(k)\|^2 - \|x\|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty}x_n^2 - \sum_{n=1}^{N}((x(k)_n)^2 - x_n^2) \\
&< \frac{\varepsilon}{24} + \frac{\varepsilon}{24} + \frac{\varepsilon}{24} \\
&= \frac{\varepsilon}{8}.
\end{aligned}
$$

因此, 对任意的 $k \geqslant K$, 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}((x(k)_n - x_n)^2 &= \sum_{n=1}^{N}((x(k)_n - x_n)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty}((x(k)_n - x_n)^2 \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}(x(k)_n)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty}x_n^2\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2\left(\frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8}\right) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

即
$$(d(x(k),x))^2 < \varepsilon .$$
从而 $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = x$. 证毕.

令 $x(k)$ 为集合 ℓ^2 中第 k 个坐标为 1 其余坐标全部为 0 的元素, 则 $\|x(k)\| = 1$, 因此, 由上面的定理, 在 ℓ^2 中, $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = 0$ 不成立, 但是, 显然, 在¡ ¥ 中, $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = 0$ 成立. 所以, 在集合 ℓ^2 上的这两个拓扑确实是不同的. 由推论 2.6.6、定理 2.6.13 和定理 2.2.12 知, Hilbert 空间 ℓ^2 包含了比作为¡ ¥ 的子空间 ℓ^2 更多的开集. 进一步, 由这些结论也能得到下面的定理.

定理 2.6.14 设 $X \subset \ell^2$, 且对任意的 $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\|$, 则 X 作为 Hilbert 空间 ℓ^2 的子空间和作为乘积空间¡ ¥ 的子空间有相同的拓扑.

最后, 我们定义和空间. 和空间运算本身是一种平凡的运算, 对其各种性质的讨论几乎全部都是显然的, 但是它可以作为研究其他性质和构造例子的工具.

设 $\{(X_s,d_s):s\in S\}$ 是一族度量空间，且对任意不同的 $s_1,s_2\in S$，$X_{s_1}\cap X_{s_2}=\varnothing$. 选择固定的 $x_s\in X_s$，那么，我们在集合 $X\bigcup_{s\in S}X_s$ 上定义度量：

$$d(x,y)=\begin{cases}d_s(x,y), & \text{若 } x,y\in X_s;\\ d_{s_1}(x,x_{s_1})+1+d_{s_2}(x_{s_2},y), & \text{若 } x\in X_{s_1},y\in X_{s_2},\text{且 } s_1\neq s_2.\end{cases}$$

容易验证，d 确实是 X 上的一个度量，称 (X,d) 为 $\{(X_s,d_s):s\in S\}$ 的**和度量空间**，记为 $\oplus_{s\in S}(X_s,d_s)$ 或者 $\oplus_{s\in S}X_s$. 我们可以定义自然映射 $q_s:X_s\to X$ 为 $q_s(x)=x$，则 $q_s:X_s\to X$ 为开闭等距嵌入. 因此，每一个 X_s 都是 $\oplus_{s\in S}X_s$ 的既开又闭子空间.

下面列出了关于和空间 $\oplus_{s\in S}X_s$ 的进一步性质，证明是显然的：

(1) $\mathcal{T}_d=\left\{\bigcup_{s\in S}U_s:U_s\in\mathcal{T}_{d_s}\right\}$；

(2) 对任意的集合 $A\subset X$，A 是 $\oplus_{s\in S}X_s$ 的开（闭）集当且仅当对任意的 $s\in S$，$A\cap X_s$ 是 X_s 的开（闭）集；

(3) 设 1 是闭包运算或者内部运算或者边界运算，则对任意的 $A\subset X$，

$$1(A)=\bigcup_{s\in S}1(A\cap X_s);$$

(4) 对任意的 $s\in S$，设 $\mathcal{B}_s$ 是 X_s 的（子）基，则 $\bigcup_{s\in S}\mathcal{B}_s$ 是 $\oplus_{s\in S}X_s$ 的（子）基；

(5) 设 (Y,ρ) 是度量空间，$f:\oplus_{s\in S}X_s\to Y$ 是连续的当且仅当对任意的 $s\in S$，$f|X_s:X_s\to Y$ 是连续的.

对任意一族度量空间 $\{(X_s,d_s):s\in S\}$，当它们并不是两两不相交时，我们可以用 $Y_s=X_s\times\{s\}$ 代替 X_s，则 $\{(Y_s,d_s):s\in S\}$ 是两两不相交的. 进一步，$d_s'((x,s),(y,s))=d(x,y)$ 很自然地定义了 Y_s 上的一个度量，且 (X_s,d_s) 与 (Y_s,d_s') 是等距同构的. 这样 $\oplus_{s\in S}(Y_s,d_s')$ 有定义，而且我们认为

$$\oplus_{s\in S}(X_s,d_s)=\oplus_{s\in S}(Y_s,d_s').$$

因此，无论 $\{(X_s,d_s):s\in S\}$ 是否两两不相交，我们可以认为 $\oplus_{s\in S}X_s$ 都是有定义的.

练 习 2.6

2.6.A. 设 d, ρ 是集合 X 上两个等价的度量，$A \subset X$. 证明 $d \mid A \times A, \rho \mid A \times A$ 是集合 A 上两个等价的度量.

2.6.B. 设 (X,d) 是度量空间. 我们称乘积空间 X^2 的子集

$$\triangle = \{(x,x) \in X^2 : x \in X\}$$

为 X 的对角线. 证明 $\triangle$ 是空间 X^2 的闭子集.

2.6.C. 设 (X,d)，(Y,ρ) 是两个度量空间. Y_1 是 Y 的子空间，$f: X \to Y_1$ 是映射. 证明 $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ 是连续的以及 $f:(X,d) \to (Y_1, \rho \mid Y_1 \times Y_1)$ 是连续的等价. 但是，$f:(X,d) \to (Y,\rho)$ 是开（闭）的以及 $f:(X,d) \to (Y_1, \rho \mid Y_1 \times Y_1)$ 是开（闭）的不等价.

2.6.D. 证明 $(\ell^2)^2 \approx \ell^2$.

2.6.E. 证明 $\mathbf{J}^n$ 同胚于它的子空间 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{J}^n : x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n\}$. 类似的结论对 $Q = \mathbf{J}^{¥}$ 成立吗？证明你的结论.

2.6.F. 设 (X,d) 是度量空间，Y 是 X 的正则开集. 证明对任意的集合 $A \subset Y$，A 是 Y 的正则开集的充分必要条件是 A 是 X 的正则开集. 举例说明，Y 中的正则开集未必是 X 中的正则开集与 Y 的交. 请再探讨正则闭集的情况.

2.6.G. 集合 A 是度量空间 (X,d) 的收缩核（见练习 2.4.A）当且仅当对任意的度量空间 Y 及任意的连续映射 $f: A \to Y$，存在连续映射 $F: X \to Y$ 使得 $F \mid A = f$.

2.7 Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理

本节将建立度量空间到 ¡ （或单位区间 $\mathbf{I}$）的连续映射的几个重要定理，今后将多次用到它们.

定理 2.7.1（Urysohn 引理）设 X 是度量空间，A, B 是 X 中两个不相交的闭集，则存在连续映射 $f: X \to \mathbf{I}$ 使得 $f(A) \subset \{0\}$ 且 $f(B) \subset \{1\}$.

证明 如果 $A=\varnothing$ 或者 $B=\varnothing$，那么，令 $f:X\to\mathbf{I}$ 为常值 1 函数或者常值 0 函数，则 f 满足定理的要求．现在，假定 A，B 都是非空的．设 d 是 X 上的度量，定义 $f:X\to\mathbf{I}$ 如下：对任意的 $x\in X$，

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}.$$

由于 $A\cap B=\varnothing$，故对任意的 $x\in X$，$x\notin A$ 或者 $x\notin B$．例如，假设 $x\notin A$，则由 A 是闭的，故存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(x,\varepsilon)\cap A=\varnothing$．由此可知，

$$d(x,A)\geqslant\varepsilon>0.$$

所以对任意的 $x\in X$，

$$d(x,A)+d(x,B)\neq 0.$$

从而，由定理 2.4.4 可知，$f:X\to\mathbf{I}$ 是连续的．验证 $f(A)\subset\{0\}$ 和 $f(B)\subset\{1\}$ 是显然的．证毕．

推论 2.7.1 设 X 是度量空间，A，B 是 X 中不相交的闭集，$a,b\in$ ¡ 且 $a<b$，则存在连续映射 $f:X\to[a,b]$ 使得 $f(A)\subset\{a\}$ 且 $f(B)\subset\{b\}$．

推论 2.7.2 设 X 是度量空间，A，B 是 X 中不相交的闭集，则存在 X 中不相交的开集 U，V，使得 $A\subset U, B\subset V$．

证明 由定理，假设连续映射 $f:X\to\mathbf{I}$ 满足 $f(A)\subset\{0\}$，$f(B)\subset\{1\}$．那么，

$$U=f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right),V=f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)$$

满足要求．证毕．

定义 2.7.1 设 X 是集合，(Y,ρ) 是度量空间，(f_n) 是 X 到 Y 的映射列，$f:X\to Y$ 是一个映射．

（1）若对任意的 $x\in X$，序列 $(f_n(x))$ 收敛于 $f(x)$，则称 (f_n) **点态收敛**于 f，记作 $f_n\to f$．因此，(f_n) 点态收敛于 f 当且仅当对任意的 $x\in X$ 及任意的 $\varepsilon>0$，存在 N 使得 $n>N$ 时，$\rho(f_n(x),f(x))<\varepsilon$．

（2）若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N 使得 $n>N$ 时，对任意的 $x\in X$，$\rho(f_n(x),f(x))<\varepsilon$，则称 (f_n) **一致收敛**于 f，记作 $f_n\rightrightarrows f$．

定理 2.7.2 设 (X,d)，(Y,ρ) 是度量空间，(f_n) 是 X 到 Y 的连续映射列，$f:X\to Y$ 是一个映射. 若 $f_n\rightrightarrows f$，则 $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ 连续.

证明 设 $x_0\in X$，我们证明 f 在 x_0 点连续. 对任意的 $\varepsilon>0$，由于 $f_n\rightrightarrows f$，存在 N 使得 $n>N$ 时，对任意的 $x\in X$，有

$$\rho(f_n(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{3}\ .$$

由于 $f_{N+1}:(X,d)\to(Y,\rho)$ 连续，故存在 $\delta>0$ 使得当 $d(x,x_0)<\delta$ 时，

$$\rho(f_{N+1}(x),f_{N+1}(x_0))<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而由以上两式知

$$\begin{aligned}&\rho(f(x),f(x_0))\\&\leqslant\rho(f(x),f_{N+1}(x))+\rho(f_{N+1}(x),f_{N+1}(x_0))+\rho(f_{N+1}(x_0),f(x_0))\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 f 在 x_0 点连续. 证毕.

注 2.7.1 (1) 细心的读者应该能看出，这个证明和数学分析中相应定理的证明没有任何实质性差异.

(2) 正如大家所知道的，如果把定理 2.7.2 中的条件 $f_n\rightrightarrows f$ 减弱为 $f_n\to f$，则 f 未必连续！但问题是，这时，f 是否有连续点?

定义 2.7.2 设 X 是度量空间，A 是 X 的子集，若存在可数多个开（闭）集 $\{K_n:n=1,2,\cdots\}$ 使得 $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n\left(A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n\right)$，则称 A 是 X 的一个 G_δ-集(F_σ-集).

引理 2.7.1 度量空间的每一个开集或闭集都既是 G_δ-集又是 F_σ-集.

证明 设 (X,d) 是度量空间. 我们先证明 X 中的每一个闭集 C 都是 G_δ-集. 由定理 2.4.4 知 $d(\cdot,C)$ 是连续的，因此，由定理 2.4.3 知

$$U_n=\left\{x\in X:d(x,C)<\frac{1}{n}\right\}$$

是 X 的开集. 下面利用 C 的闭性证明 $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_n$，从而说明 C 是 G_δ-集. 显然，

$C\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$. 现在, 设 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$, 则对任意的 $n\in$¥ , 存在 $x_n\in C$ 使得

$$d(x,x_n)<\frac{1}{n}.$$

于是, 由定理 2.2.12 知, $x=\lim x_n\in C$. 所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\subset C$.

利用 de Moegen 对偶律, 每一个开集都是 F_δ-集.

其余两个结论是显然的. 证毕.

若令 $X=$¡ , 则¤ 是¡ 中 F_δ-集但非 G_δ-集. 前者的证明是显然的, 后者的证明有一定难度.

推论 2.7.3 设 A 是度量空间 (X,d) 中的非空闭集, 则存在连续映射 $f:X\to\mathbf{I}$ 使得 $f^{-1}(0)=A$.

证明 由引理 2.7.1, 存在开集族 $\{U_n:n=1,2,\cdots\}$ 使得 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$. 令 $F_n=X\setminus U_n$, 则 F_n 是 X 中的闭集且 $F_n\cap A=\varnothing$. 由 Urysohn 引理（定理 2.7.1）, 存在连续函数 $f_n:X\to\mathbf{I}$ 使得

$$f_n(A)\subset\{0\},\quad f_n(F_n)\subset\{1\}.$$

现在令 $f_n:X\to\mathbf{I}$ 为: 对任意的 $x\in X$,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}f_n(x).$$

显然, f 确实是 X 到 $\mathbf{I}$ 的一个映射. 又显然 $\left(\sum_{i=1}^{n}2^{-i}f_i\right)_n$ 是 X 到 $\mathbf{I}$ 的连续函数列且一致收敛于 f, 故由上面的定理知 f 也是连续的. 由于 $A\neq\varnothing$ 且 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$, 所以 $f^{-1}(0)=A$ 是显然的. 证毕.

注 2.7.2 这个推论有一个直接且简单的证明, 请读者练习. 这里, 写出这个复杂而且不直接的证明是因为这个证明对更一般的情况仍然有效.

为了证明 Tietze 扩张定理, 我们需要下面的引理.

引理 2.7.2 设 X 是度量空间, A 是 X 中的闭集, $g:A\to[-\lambda,\lambda]$ 连续, 这里 $\lambda>0$, 则存在连续映射 $g^*:X\to\left[-\frac{1}{3}\lambda,\frac{1}{3}\lambda\right]$ 使得对任意的 $a\in A$, 有

$$|g(a)-g^*(a)|\leqslant\frac{2}{3}\lambda.$$

证明 令 $E=g^{-1}\left(\left[-\lambda,-\frac{1}{3}\lambda\right]\right), F=g^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}\lambda,\lambda\right]\right)$, 则 E, F 是 A 的不相交的闭集. 因为 A 是 X 的闭集, 所以 E, F 也是 X 的闭集（为什么？）. 故由 Urysohn 引理（定理 2.7.1）知, 存在连续映射 $g^*:X\to\left[-\frac{1}{3}\lambda,\frac{1}{3}\lambda\right]$ 使得

$$g^*(E)\subset\left\{-\frac{1}{3}\lambda\right\},\quad g^*(F)\subset\left\{\frac{1}{3}\lambda\right\},$$

如图 2-5 所示. 容易验证, g^* 满足我们的要求.

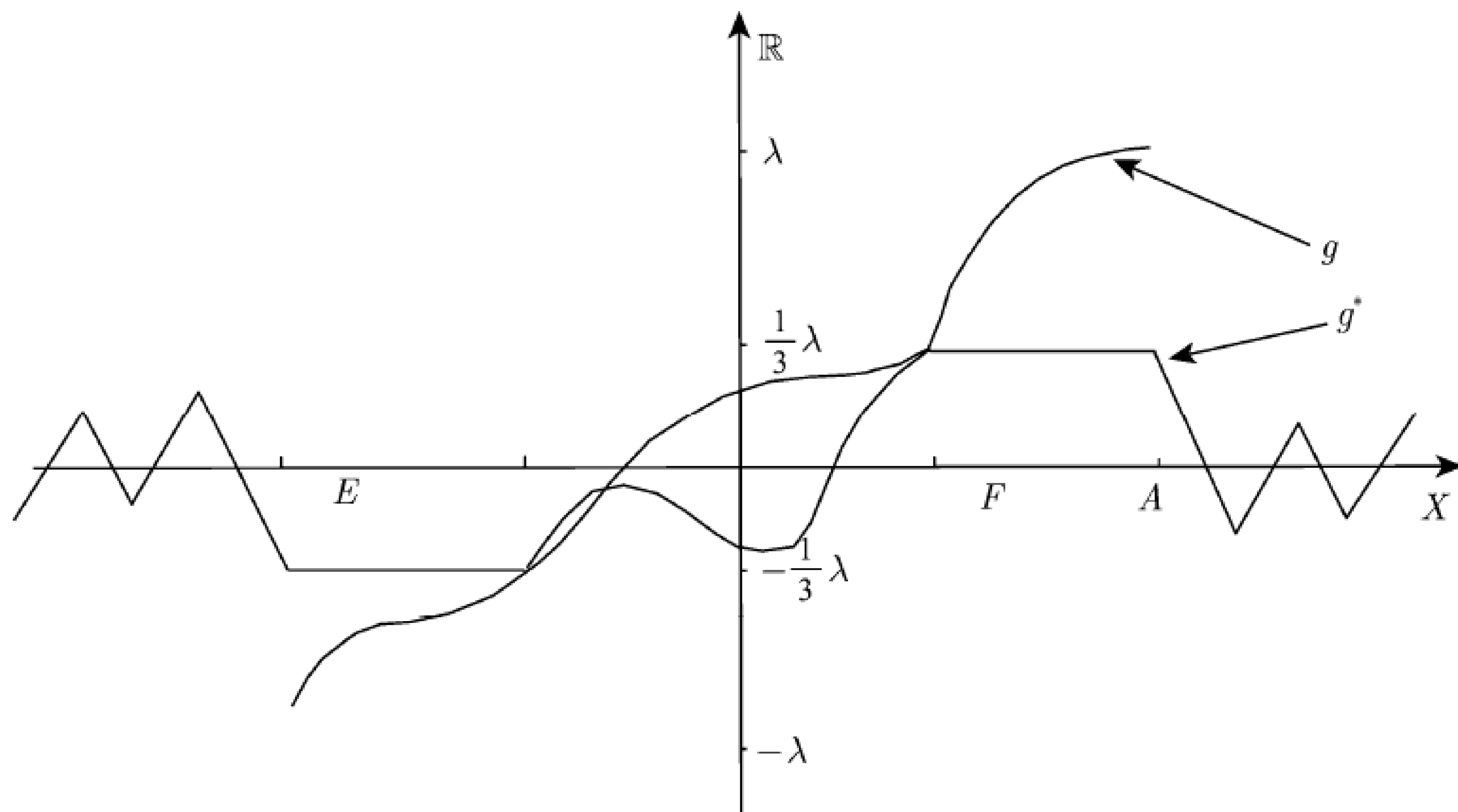


图 2-5 g^* 的定义

定理 2.7.3（Tietze 扩张定理） 设 X 是度量空间, A 是 X 中的闭子集, $f:A\to[a,b]$ 连续, 则存在连续映射 $\tilde{f}:X\to[a,b]$ 使得 $\tilde{f}|A=f$. 一般地, 我们称 $\tilde{f}:X\to[a,b]$ 为 $f:X\to[a,b]$ **的连续扩张**.

证明 不妨设 $[a,b]=[-1,1]$. 我们归纳地定义两个连续函数列:

$$\left(f_n:A\to\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n,\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right)_{n=0}^{\infty}$$

和

$$\left(g_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]\right)_{n=1}^{\infty},$$

使得对任意的 n 和任意的 $a \in A$，有：

(i) $f_0(a) = f(a)$；

(ii) $|f_{n-1}(a) - g_n(a)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n, n \geqslant 1$；

(iii) $f_n(a) = f_{n-1}(a) - g_n(a)$.

事实上，令 $f_0(a) = f(a)$，则（i）成立.

设 $(f_i)_{i=0}^{n-1}$ 及 $(g_i)_{i=1}^{n-1}$ 已经定义，由于 $f_{n-1} : A \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$ 连续，故由引理 2.7.2 知存在连续映射 $g_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$ 使得（ii）对 n 成立. 现在对任意的 $a \in A$，令

$$f_n(a) = f_{n-1}(a) - g_n(a),$$

则 $|f_n(a)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 且 $f_n : A \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ 连续. 故归纳定义完成.

由于对任意的 $x \in X$，$|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，所以级数 $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 收敛且由定理 2.7.2 知 $\tilde{f} : X \to [-1,1]$ 连续.

现在我们证明 $\tilde{f} | A = f$. 事实上，对任意的 $a \in A$，

$$\begin{aligned} f(a) - \tilde{f}(a) &= f(a) - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} g_n(a) \\ &= f(a) - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (f_{n-1}(a) - f_n(a)) \quad (\text{由 (iii)}) \\ &= f(a) - \lim_{N\to\infty} (f_0(a) + f_N(a)) \\ &= f(a) - f(a) - \lim_{N\to\infty} f_N(a) \quad (\text{由 (i) 及 } f_N \text{ 的定义}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 $\tilde{f}$ 是 f 到 X 上的连续扩张. 证毕.

我们有下面的推论.

推论 2.7.4 设 A 是度量空间 X 的闭集, $f: A \to \mathbb{R}$ 连续, 则存在连续映射 $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ 使得 $\tilde{f} | A = f$.

证明 由于考虑的是拓扑性质, 所以我们用 $(-1,1)$ 代替 $\mathbb{R}$. 首先由 Tietze 扩张定理（定理 2.7.3）可知, 存在 $f_1: X \to [-1,1]$ 使得 $f_1 | A = f$. 令 $B = f_1^{-1}(\{-1,1\})$, 则 $A \cap B = \varnothing$. 由 Urysohn 引理（定理 2.7.1）可知, 存在 $\alpha: X \to \mathbf{I}$ 使得 $\alpha(B) \subset \{0\}$, $\alpha(A) \subset \{1\}$. 现在令 $\tilde{f}: X \to (-1,1)$ 为

$$\tilde{f}(x) = f_1(x) \cdot \alpha(x),$$

则 $\tilde{f}: X \to (-1,1)$ 是连续的且其值域确实落在 $(-1,1)$ 中, 同时, 对任意的 $x \in A$, 有

$$\tilde{f}(x) = f_1(x) = f(x).$$

证毕.

利用同样的方法可以证明:

推论 2.7.5 设 A 是度量空间 X 的闭集, J 是 $\mathbb{R}$ 的区间, $f: A \to J$ 连续, 则存在连续映射 $\tilde{f}: X \to J$ 使得 $\tilde{f} | A = f$.

下面的推论是有控制的连续扩张的存在性定理.

推论 2.7.6 设 A 是度量空间 X 的闭子集, $\varepsilon \in (0,+\infty]$. $f: A \to J$ 连续, 这里 J 为区间. $g: X \to J$ 连续且对任意的 $a \in A$ 有 $|f(a) - g(a)| < \varepsilon$, 则存在 f 到 X 上的连续扩张 $\tilde{f}: X \to J$ 使得对任意的 $x \in X$, 有 $|\tilde{f}(x) - g(x)| < \varepsilon$.

证明 由 Tietze 扩张定理的推论（推论 2.7.5）可知, 存在 $f: A \to J$ 的连续扩张 $F: X \to J$. 令

$$U = \{x \in X : |F(x) - g(x)| < \varepsilon\},$$

那么由假设和定理 2.4.3 中的（1）知, U 为 X 中的开集且 $U \supset A$. 从而由 Urysohn 引理（定理 2.7.1）可知, 存在 $\alpha: X \to \mathbf{I}$ 使得 $\alpha(A) \subset \{1\}$, $\alpha(X \setminus U) \subset \{0\}$. 令 $\tilde{f}: X \to J$ 为: 对任意的 $x \in X$,

$$\tilde{f}(x) = \alpha(x) F(x) + (1 - \alpha(x)) \cdot g(x).$$

则 $\tilde{f}(x): X \to J$ 连续. 显然, 当 $x \in A$ 时, $\tilde{f}(x) = f(x)$. 进一步, 对任意的 $x \in X$, 分两种情况考虑, $x \in U$ 和 $x \in X \setminus U$, 容易验证均有

$$|\tilde{f}(x) - g(x)| < \varepsilon .$$

证毕.

推论 2.7.7 设 A 是度量空间 X 的闭子集, $N \in$ ¥, 对任意的 $n \in N$, J_n 是区间. d 是 $Y = \prod_{n \in N} J_n$ 上的乘积度量. $\varepsilon \in (0, +\infty]$, $f: A \to Y$ 连续. $g: X \to Y$ 连续, 且对任意的 $a \in A$, 有 $d(f(a), g(a)) < \varepsilon$, 则存在 f 到 X 上的连续扩张 $\tilde{f}: X \to Y$, 使得对任意的 $x \in X$, 有 $d(\tilde{f}(x), g(x)) < \varepsilon$.

请读者自证.

现在考虑如下问题: 设 (X, d) 是度量空间, $\{A_s : s \in S\}$ 是 X 的非空子集族且 $X = \bigcup_{s \in S} A_s$, Y 是度量空间, $f: X \to Y$ 是一个映射. 那么, f 的连续性和 $f | A_s$ 的连续性有什么关系. 首先, 下面的引理是显然的.

引理 2.7.3 在上述假定下, 若 $f: X \to Y$ 是连续的, 则对任意的 $s \in S$, $f | A_s : A_s \to Y$ 也是连续的.

但其逆不真, 例如, 对于著名的 **Dirichlet 函数** $D:$¡ $\to \{0,1\}$:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \in ¤, \\ 1, & \text{若 } x \in \mathbb{P}. \end{cases}$$

$D|$¤ 和 $D | \mathbb{P}$ 都是连续的, 但 $D:$¡ $\to \{0,1\}$ 不是连续的. 下面的定理建立了其逆成立的两个充分条件:

定理 2.7.4 设 (X, d) 是度量空间, $\{A_s : s \in S\}$ 是 X 的非空子集族, 且 $X = \bigcup_{x \in S} A_s$, Y 是度量空间, $f: X \to Y$ 是一个映射. 如果对任意的 $s \in S$, $f | A_s : A_s \to Y$ 是连续的且下列条件之一成立, 则 $f: X \to Y$ 是连续的:

(1) S 是有限集且每一个 A_s 是 X 的闭集;

(2) 每一个 A_s 是 X 的开集.

证明 作为例子我们证明 (1). 设 $F \subset Y$ 是 Y 的闭集, 则容易验证

$$f^{-1}(F) = \bigcup_{s \in S} (f | A_s)^{-1}(F) .$$

由假设, 对每一个 $s \in S$, $(f | A_s)^{-1}(F)$ 是 A_s 的闭集, 因此也是 X 的闭集. 又因

S 是有限集，所以 $f^{-1}(F)=\bigcup\limits_{s\in S}(f\mid A_s)^{-1}(F)$ 是 X 的闭集，从而 $f:X\to Y$ 是连续的. 证毕.

我们经常需要下面的推论：

推论 2.7.8（黏结引理）设 A, B 是度量空间 X 的闭集，且 $X=A\bigcup B$，Y 是度量空间，$f:A\to Y$ 和 $g:B\to Y$ 是连续的，且对任意的 $x\in A\bigcap B$，$f(x)=g(x)$，则下面的函数 $h:X\to Y$ 是有定义的且连续的：

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \text{若 } x\in A, \\ g(x), & \text{若 } x\in B. \end{cases}$$

练 习 2.7

2.7.A. 给出推论 2.7.3 的一个直接证明.

2.7.B. 设 (X,d) 是度量空间，A 是其闭子集，$f:A\to \mathbf{I}$ 连续. 证明下面定义的映射 $g:X\to \mathbf{I}$ 是 f 到 X 的连续扩张：

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{若 } x\in A, \\ \inf\left\{f(a)+\dfrac{d(x,a)}{d(x,A)}-1: a\in A\right\}, & \text{若 } x\in X\setminus A. \end{cases}$$

这个结果给出了 Tietze 扩张定理（定理 2.7.3）的一个直接证明，我们在本节正文中给出的证明可以推广到更广的情况.

设 Y 是度量空间. 如果对任意的度量空间 X，当 Y 为 X 的闭子空间时，Y 就是 X 的收缩核，那么，我们称 Y 是**绝对收缩核**. 如果对任意的度量空间 X 和 X 的闭子集 A 以及连续映射 $f:A\to Y$，都存在连续扩张 $\tilde{f}:X\to Y$，我们称 Y 是**绝对可扩张的空间**.

2.7.C. 本节的结论证明了哪些空间是绝对可扩张的?

2.7.D. 设 (Y,d) 是绝对可扩张的度量空间，证明 X 是绝对收缩核.

2.7.E. 证明绝对可扩张的度量空间的收缩核是绝对可扩张的.

2.7.F. 证明绝对可扩张的度量空间的乘积是绝对可扩张的.

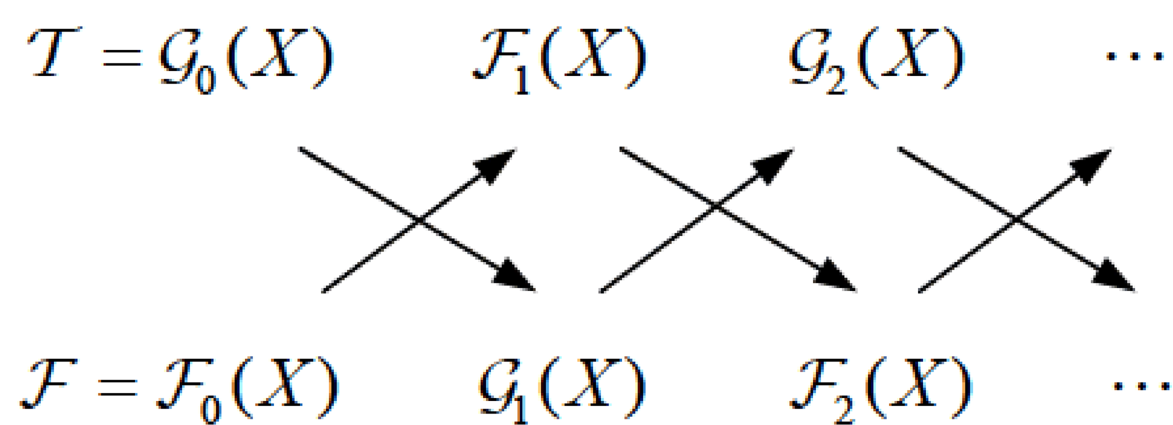
2.7.G. 证明 $\mathbf{J}^n$ 是 ¡ ^{n} 的收缩核.

2.8 Borel 集和绝对 Borel 空间

本节主要给出 Borel 集和绝对 Borel 空间的定义，它们的性质将在以后给出.

上一节，我们定义了 F_σ-集和 G_σ-集，并证明了开集和闭集都既是 F_σ-集又是 G_σ-集. 显然，可数个 F_σ-集（G_σ-集）的并（交）是 F_σ-集（G_σ-集）. 但是，一般来说，可数个 F_σ-集的交未必是 F_σ-集；可数个 G_σ-集的并未必是 G_σ-集. 为此，我们有下面一系列的定义和事实.

设(X, d)是度量空间，(X,d)中可数个 F_σ-集的交称为 $F_{\sigma\delta}$-集；可数个 G_σ-集的并称为 $G_{\delta\sigma}$-集；可数个 $F_{\sigma\delta}$-集的并称为 $F_{\sigma\delta\sigma}$-集；可数个 $G_{\delta\sigma}$-集的交称为 $G_{\delta\sigma\delta}$-集. 依此类推. 我们分别称(X,d)中的开集和闭集为 **0-阶 G-型 Borel 集**和 **0-阶 F-型 Borel 集**，其全体分别用 $\mathcal{G}_0(X)=\mathcal{T}_d$ 和 $\mathcal{F}_0(X)$ 表示，0-阶 G-型 Borel 集和 0-阶 F-型 Borel 集统称为 **0-阶 Borel 集**；(X,d)中的 G_δ-集和 F_σ-集称为 **1-阶 G-型 Borel 集**和 **1-阶 F-型 Borel 集**，其全体分别用 $\mathcal{G}_1(X)$ 和 $\mathcal{F}_1(X)$ 表示，1-阶 G-型 Borel 集和 1-阶 F-型 Borel 集统称为 **1-阶 Borel 集**. 依此类推，我们可以定义 ***n*-阶 G-型 Borel 集**和 ***n*-阶 F-型 Borel 集**，分别用 $\mathcal{G}_n(X)$ 和 $\mathcal{F}_n(X)$ 表示；$\mathcal{G}_n(X)\cup\mathcal{F}_n(X)$ 的成员称为 ***n*-阶 Borel 集**. 利用引理 2.7.1 可以证明，每一个 n-阶 Borel 集既是$(n+1)$-阶 G-型 Borel 集又是$(n+1)$-阶 F-型 Borel 集. A 是 n-阶 G-型 Borel 集当且仅当 $X\setminus A$ 是 n-阶 F-型 Borel 集. 另外，两个 n-阶 Borel 集族中的一个对可数并封闭，另一个对可数交封闭，分别称为 ***n*-阶可和 Borel 族**，***n*-阶可积 Borel 族**. 显然，当 n 是偶数时，$\mathcal{G}_n(X)$ 是 n-阶可和 Borel 族，$\mathcal{F}_n(X)$ 是 n-阶可积 Borel 族；当 n 是奇数时，刚好相反.



其中, 上面的一行关于可数并封闭, 下面的一行关于可数交封闭, 斜向下的箭头↘表示取可数交, 斜向上的箭头↗表示取可数并.

设 (X,d) 是度量空间, 用 $\mathcal{B}(X)$ 表示包含了 $\mathcal{G}_0(X)=\mathcal{T}_d$ 且对可数并、可数交以及取余封闭的最小集族, $\mathcal{B}(X)$ 中的成员称为 X 的 **Borel 集**. 显然, 对任意的 n, n-阶 Borel 集是 Borel 集, 即

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n(X)\bigcup\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_n(X)\subset\mathcal{B}(X).$$

一般来说, 例如, 当 $X=$¡ 时, 相反的包含关系并不成立.

利用超限归纳法可以给出 $\mathcal{B}(X)$. 事实上, 设 (X,d) 是度量空间, 我们归纳地定义 $\{\mathcal{F}_\xi(X):\xi<\omega_1\}$ 和 $\{\mathcal{G}_\xi(X):\xi<\omega_1\}$ 如下:

(1) $\mathcal{G}_0(X)=\mathcal{T}_d$ 和 $\mathcal{F}_0(X)$ 如上定义;

(2) 设 $\eta<\omega_1$ 且 $\{\mathcal{F}_\xi(X):\xi<\eta\}$ 和 $\{\mathcal{G}_\xi(X):\xi<\eta\}$ 已经定义.

如果 $\eta=\xi+n$ 是奇序数, 即 ξ 是极限序数且 n 是奇数, 令 $\mathcal{G}_\eta(X)$ 是 $\mathcal{G}_{\xi+n-1}(X)$ 中元素的可数交的全体, $\mathcal{F}_\eta(X)$ 是 $\mathcal{F}_{\xi+n-1}(X)$ 中元素的可数并的全体;

如果 $\eta=\xi+n$ 是偶序数, 即 ξ 是极限序数且 $n\geqslant 0$ 是偶数, 令 $\mathcal{G}_\eta(X)$ 是 $\{\bigcup\mathcal{G}_\xi(X):\xi<\eta\}$ 中元素的可数并的全体, $\mathcal{F}_\eta(X)$ 是 $\{\bigcup\mathcal{F}_\xi(X):\xi<\eta\}$ 中元素的可数交的全体.

不难证明

$$\mathcal{B}(X)=\bigcup\{\mathcal{F}_\xi:\xi<\omega_1\}=\bigcup\{\mathcal{G}_\xi:\xi<\omega_1\}.$$

一般来说, 例如, 当 $X=$¡ 时, $\mathcal{B}(X)$ 并不是 X 的所有子集族 $P(X)$. 事实上, 容易证明 $|\mathcal{B}($¡$)|=c$ 而 $|P($¡$)|=2^c$.

定义 2.8.1 设 (X,d) 是度量空间, $n\geqslant 0$. 如果对于任意的度量空间 (Y,ρ) 和 Y 的子空间 Z, 若 Z 同胚于 X, 那么 $Z\in\mathcal{F}_n(Y)(Z\in\mathcal{G}_n(Y))$, 则称空间 (X,d) 是**绝对 $\mathcal{F}_n$ 度量空间 (绝对 $\mathcal{G}_n$ 度量空间)**.

显然, 绝对 $\mathcal{F}_n$ 度量空间和绝对 $\mathcal{G}_n$ 度量空间一定既是绝对 $\mathcal{F}_{n+1}$ 度量空间也是绝对 $\mathcal{G}_{n+1}$ 度量空间. 不存在绝对 $\mathcal{G}_0$ 度量空间. 事实上, 对任意的度量空间 (X,d), 作为 $X\times\mathbf{I}$ 的一个自然子空间, X 不是开集, 因此, (X,d) 不是绝对

$\mathcal{G}_0$ 度量空间.

给出绝对 $\mathcal{F}_n$ 度量空间和绝对 $\mathcal{G}_n$ 的充分必要条件是一个非常有意义的课题. 请参看其他参考书.

练 习 2.8

2.8.A. 证明 **I** 是绝对 $\mathcal{F}_0$ 度量空间而 ¡ 不是.

第 3 章 度量空间的连通性

本章将讨论度量空间的三种连通性, 所有内容都是基本的. 本章中的所有概念都是拓扑性质.

3.1 连通空间

本节将定义连通空间并讨论这类空间的基本性质.

通俗地来讲, 所谓连通空间就是它不能是由两个（或更多个）互不相接的块组成的空间. 严格的定义如下.

定义 3.1.1 设 (X,d) 是度量空间, 若存在两个非空闭集 E,F 使得

$$E\cap F=\varnothing \text{ 且 } E\cup F=X,$$

则称 (X,d) 为**不连通的度量空间**. 否则, 称 (X,d) 为**连通度量空间**. 若 (X,d) 的一个子集 Y 作为子空间是连通度量空间, 则称 Y 为 (X,d) 的**连通集**.

显然, 连通性是拓扑性质. 为了刻画连通性, 我们引入下面的定义.

定义 3.1.2 设 A,B 是度量空间 X 的两个子集, 若

$$\mathrm{cl}\,A\cap B=\varnothing=A\cap\mathrm{cl}\,B,$$

则称 A,B 为 X 的**隔离子集**.

定理 3.1.1 设 Y 是度量空间 X 的子空间, A,B 是 Y 的子集, 则 A,B 为 Y 的隔离子集当且仅当 A,B 为 X 的隔离子集.

请读者自证.

下面的定理给出了不连通空间的等价刻画, 由此可以自然地得到连通空间的等价刻画.

定理 3.1.2 设 (X,d) 是度量空间, 则下列条件等价:

(1) X 不是连通的;

(2) 存在两个非空开集 U,V 使得 $U\cap V=\varnothing$ 且 $X=U\cup V$;

(3) X 存在非空的既开又闭的真子集;

(4) X 存在非空隔离子集 A,B 使得 $X=A\cup B$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 E,F 是 X 的非空闭集, 且

$$E\cap F=\varnothing, E\cup F=X,$$

则 $U=X\setminus E$, $V=X\setminus F$ 是 X 的非空开集, 且

$$U\cup V=X, U\cap V=\varnothing.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 U,V 是 X 的非空开集, 且

$$U\cap V=\varnothing, X=U\cup V,$$

则 $U=X\setminus V$, 从而 U 是 X 的非空的既开又闭的真子集.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设 C 是 X 的非空的既开又闭的真子集, 则 C 与 $X\setminus C$ 是 X 的非空隔离子集, 且 $X=C\cup(X\setminus C)$.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 A,B 是 X 的非空隔离子集, 且 $X=A\cup B$, 则

$$X=\mathrm{cl}\,A\cup B.$$

由于 $\mathrm{cl}\,A\cap B=\varnothing$, 从而

$$\mathrm{cl}\,A=X\setminus B.$$

又由于 $A\cap B\subset\mathrm{cl}A\cap B=\varnothing$ 且 $X=A\cup B$, 从而



$$A = X \setminus B.$$

故 $\mathrm{cl}\, A = A$，即 A 为闭集. 同理 B 也是闭集. 从而 X 是其两个非空的不相交的闭集之并，从而 X 不连通. 证毕.

注 3.1.1 上述定理的四个等价条件中，条件（4）有点不大自然，那么我们为什么要列上它呢？事实上，条件（4）对于刻画连通子集来说使用起来比较方便. 设 Y 是 X 的子空间，$A, B \subset Y$，由定理 3.1.1 知 A, B 在 X 中是隔离的与其在 Y 中是隔离的是等价的. 也就是说，隔离性与子集所在的子空间无关. 这一点将对我们后面的讨论带来很大的方便. 相比较而言，A, B 是 X 的开集或闭集与它们是 Y 的开集或闭集是不同的.

现在先给出几个简单的连通与不连通空间的例子，然后研究连通空间的性质及其运算保持情况，最后利用这些结果再列出一些正反例以说明它们的应用.

例 3.1.1 任何度量空间中非单点的离散子集都不是连通的，非单点的离散度量空间是不连通的，从而它的任何非单点的子集都不连通.

例 3.1.2 $\mathbb{R}$ 中有理数集 $\mathbb{Q}$ 和无理数集 P 均不连通. 事实上，选择 $p \in \mathrm{P}$，则 $(-\infty, -p) \cap \mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的既开又闭的非空真子集. 同理，P 也不连通.

但我们有下面重要的结论.

定理 3.1.3 实数空间 $\mathbb{R}$ 是连通空间.

证明 反设 $\mathbb{R}$ 不是连通的，则存在非空闭集 $E, F \subset \mathbb{R}$ 使得

$$E \cap F = \varnothing \text{ 且 } \mathbb{R} = E \cup F.$$

选择 $a \in E,\ b \in F$ 且不妨设 $a < b$，考虑集合 $E' = E \cap [a, b]$ 及 $F' = F \cap [a, b]$. 则 E', F' 是 $\mathbb{R}$ 中的闭集且

$$E' \cap F' = \varnothing,\ E' \cup F' = [a, b].$$

令 $b' = \sup E'$，则由 E' 是 $\mathbb{R}$ 中的闭集知 $b' \in E'$，从而 $b' \notin F'$. 由于 b 也是 E' 的一个上界，故 $b' < b$. 显然，对任意的 $x \in (b', b),\ x \notin E'$，因此 $(b', b) \subset F'$. 因为 F' 是闭集，故 $b' \in F'$. 矛盾. 证毕.

注 3.1.2 在上述的证明中，我们使用上确界原理证明了 $\mathbb{R}$ 是连通的. 事实上，我们也可以假定 $\mathbb{R}$ 是连通的而证得上确界原理. 从这个意义上来讲，它们是等价的，从而也等价于实数 $\mathbb{R}$ 的其他性质，如有限覆盖定理、单

调有界序列必收敛等.

下面给出连通集的一个有用性质.

定理 3.1.4 设 (X,d) 是度量空间, $C \subset X$. 则 C 是 X 的连通子集的充分必要条件是对任意的隔离子集 A,B, 若 $C \subset A \cup B$, 则 $C \subset A$ 或者 $C \subset B$.

证明 必要性. 令 $C_A = C \cap A$, $C_B = C \cap B$, 则由 A,B 是隔离的知 C_A, C_B 是隔离的. 又因为 $C \subset A \cup B$, 故 $C = C_A \cup C_B$. 由于 C 是连通的, 根据定理 3.1.2 知, $C_A = \varnothing$ 或者 $C_B = \varnothing$, 从而 $C \subset B$ 或者 $C \subset A$.

充分性. 若 C 不是连通的, 则由定理 3.1.2 知存在 C 的非空隔离子集 A,B 使得 $C = A \cup B$, 从而 A,B 也是 X 的隔离子集且 $C \subset A \cup B$. 但由于 A,B 是非空的且不相交的知, $C \not\subset A$ 且 $C \not\subset B$. 证毕.

关于连通集的运算, 有下面的正、反结果.

例 3.1.3 令 $X = \mathbb{R}, A = \{0\}, B = \{1\}$, 则 A,B 是 X 的连通子集, 但 $A \cup B$ 不是.

例 3.1.4 令 $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, $B = \{(x,y) : y = x^2\}$, 则 A,B 同胚于 $\mathbb{R}$, 从而 A,B 均连通. 但 $A \cap B = \{(0,0),(1,1)\}$ 不是连通的.

定理 3.1.5 设 (X,d) 是度量空间, $\{A_s : s \in S\}$ 是 X 的一族连通子集, 若存在 $s_0 \in S$ 使得对任意的 $s \in S$, $A_{s_0} \cap A_s \neq \varnothing$, 则 $\bigcup_{s \in S} A_s$ 是 X 的连通子集. 特别地, 若 $\bigcap_{s \in S} A_s \neq \varnothing$, 则 $\bigcup_{s \in S} A_s$ 是连通的.

证明 设 B,C 是非空的隔离子集且 $\bigcup_{s \in S} A_s \subset B \cup C$, 从而对任意的 $s \in S$, $A_s \subset B \cup C$, 由定理 3.1.4 知,

$$A_s \subset B \text{或者 } A_s \subset C.$$

不妨设 $A_{s_0} \subset B$, 则对任意的 $s \in S$, 由 $A_{s_0} \cap A_s \neq \varnothing$ 及 $B \cap C = \varnothing$ 有 $A_s \subset C$. 故 $A_s \subset B$. 从而 $\bigcup_{s \in S} A_s \subset B$. 应用定理 3.1.4 知, $\bigcup A_s$ 是连通的. 证毕.

定理 3.1.6 设 X 是度量空间, A 是 X 的连通集, B 是 X 的子集且 $A \subset B \subset \operatorname{cl} A$, 则 B 也是 X 的连通集. 特别地, 连通集的闭包是连通的.

证明 设 C,D 是 X 的隔离集且 $B \subset C \cup D$, 则由假设知 $A \subset C \cup D$. 由定理 3.1.4 知 $A \subset C$ 或 $A \subset D$. 不妨设 $A \subset C$, 则 $B \subset \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} C$. 由于 $\operatorname{cl} C \cap D = \varnothing$, 从而 $B \cap D = \varnothing$. 因此由 $B \subset C \cup D$ 得 $B \subset C$. 由定理 3.1.4 知 B 是连通的. 证毕.

推论 3.1.1 $\mathbb{R}$ 的子集 A 是连通的当且仅当 A 是 $\mathbb{R}$ 中的区间 (含有界

区间、无界区间、开区间、闭区间、半开半闭区间及单点集).

证明 首先, 由于每一个开区间都同胚于 $\mathbb{R}$, 从而都是连通的. 其次, 单点集显然也是连通的. 最后, 其余的区间都介于一个开区间及其闭包之间, 故由定理 3.1.6 知它们都是连通的.

现在设 $A\subset\mathbb{R}$ 不是区间, 则存在 $a,b\in A$ 及 $c\in\mathbb{R}\setminus A$ 使得 $a<c<b$. 则 $A\bigcap(-\infty,c)=A\bigcap(-\infty,c]$ 是 A 的既开又闭的非空真子集, 故 A 不连通. 证毕.

注 3.1.3 上述推论使我们完全弄清了 $\mathbb{R}$ 的全部连通子集. 但对于 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 而言, 其连通子集可能非常复杂, 我们不可能用简单的方法完全弄清它们. 后面的例子将说明这一点.

下面举例说明 $\mathbb{R}^2$ 中的连通集的内部和边界未必是连通的.

例 3.1.5 在空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 注意, $B((x_0,y_0),r)$ 表示以 (x_0,y_0) 为中心, 以 r 为半径的开球. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 的子集:

$$A=B((-2,0),1)\bigcup([-2,2]\times\{0\})\bigcup B((2,0),1),$$

$$B=\mathbb{R}\times[-1,1].$$

则由于 $B((-2,0),1)$ 与 $B((2,0),1)$ 均同胚于 $\mathbb{R}^2$, 从而是连通的 (见定理 3.1.8). $[-2,2]\times\{0\}$ 是 $(-2,2)\times\{0\}$ 的闭包. 而 $(-2,2)$ 同胚于 $\mathbb{R}$, 故由定理 3.1.3 及定理 3.1.5 知 $[-2,2]\times\{0\}$ 连通. 从而 A 是三个连通集之并, 且其中一个同其余两个的交非空, 所以, 由定理 3.1.5 知 A 是连通的. 但 $\operatorname{int}A=B((-2,0),1)\bigcup B((2,0),1)$ 显然不连通. 由定理 3.1.8 和推论 3.1.1 知 B 连通, 但 $\operatorname{bd}B=\mathbb{R}\times\{-1,1\}$ 显然不是连通的.

下面讨论连通空间的运算性质.

定理 3.1.7 设 X 是连通度量空间, Y 是度量空间, $f:X\to Y$ 是连续的满射, 则 Y 也是连通的.

证明 若 Y 不连通, 则由定理 3.1.2 知存在既开又闭的非空真子集 $C\subset Y$. 由于 f 是连续满射, 则 $f^{-1}(C)$ 是 X 的既开又闭的非空真子集, 从而 X 不连通. 证毕.

推论 3.1.2 设 X 是连通空间, $f:X\to\mathbb{R}$ 连续, 则 $f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的区间, 也即对任意的 $x,y\in X$, 如果 $f(x)<f(y)$, 则对任意的 $r\in(f(x),f(y))$, 存在 $z\in X$ 使得 $f(z)=r$.

推论 3.1.3 设 X 是连通的度量空间，则 X 或者是单点集或者满足 $|X| \geqslant c$.

证明 设 X 是非单点的连通度量空间，选择 $x, y \in X$ 使得 $x \neq y$. 由 Urysohn 引理（定理 2.7.1）知，存在连续函数 $f: X \to \mathbf{I}$ 使得 $f(x)=0$ 且 $f(y)=1$. 由定理 3.1.7 知，$f(X)$ 是包含 $0,1$ 的 $\mathbf{I}$ 的连通子集，从而也是 $\mathbb{R}$ 的连通子集. 故 $f(X)$ 是包含 $0,1$ 的区间，所以 $f(X)=\mathbf{I}$. 因此，$|X| \geqslant |\mathbf{I}| = c$. 证毕.

定理 3.1.8 设 $(X_n, n=1,2,\cdots)$ 是一列（有限或无限）空间，X 是其乘积空间，则 X 连通当且仅当对任意的 n，X_n 是连通的.

证明 必要性. 设 $p_n: X \to X_n$ 是投影映射，则 p_n 是连续的满射. 因此，若 X 是连通的，则由定理 3.1.7 知 X_n 是连通的.

充分性. 首先证明两个连通空间的乘积是连通的. 设 X_1, X_2 是连通的，$X = X_1 \times X_2$. 对任意的 $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$，令

$$A_{(x_1,x_2)} = (X_1 \times \{x_2\}) \cup (\{x_1\} \times X_2).$$

则由于 $X_1 \times \{x_2\}$ 同胚于 X_1, $\{x_1\} \times X_2$ 同胚于 X_2，故它们都是 $X_1 \times X_2$ 的连通子集. 又由于 $(X_1 \times \{x_2\}) \cap (\{x_1\} \times X_2) = \{(x_1, x_2)\}$，所以它们的并 $A_{(x_1,x_2)}$ 是连通的. 现在对任意的 $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$，$A_{(x_1,x_2)} \cap A_{(y_1,y_2)} = \{(y_1,x_2),(x_1,y_2)\} \neq \varnothing$，所以族 $\{A_{(x_1,x_2)} : (x_1,x_2) \in X_1 \times X_2\}$ 是 $X_1 \times X_2$ 中两两相交的连通子集族，因此由定理 3.1.5 知

$$X_1 \times X_2 = \bigcup \left\{ A_{(x_1,x_2)} : (x_1,x_2) \in X_1 \times X_2 \right\}$$

是连通的.

其次，利用数学归纳法可以很容易地得到有限个连通空间的乘积是连通的.

最后，证明无限可数多个连通空间的乘积是连通的.

设对每一个 $n \in \mathbb{N}$, X_n 是连通度量空间，$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 是它们的乘积. 选定 $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, \cdots) \in X$，则对任意的 n，

$$Y_n = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times \left\{ x_{n+1}^0 \right\} \times \left\{ x_{n+2}^0 \right\} \times \cdots$$

是 X 的子空间且同胚于 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$. 所以 Y_n 是连通的. 显然, $\bigcap_{n=1}^{\infty}Y_n\ni x^0$, 故由定理 3.1.5 知

$$Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}Y_n$$

是 X 的连通集（注意: 一般来说 $Y\neq X$）, 从而由定理 3.1.6 知, $\mathrm{cl}\,Y$ 是 X 的连通子集. 因此, 我们只要证明 $\mathrm{cl}\,Y=X$ 就完成了该定理的证明.

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in X$, $U\ni x$ 是 X 中的开集, 则由定理 2.6.10 知, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 及 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 中的开集 $U_1,U_2,\cdots,U_N$ 使得

$$(x_1,x_2,\cdots,x_N,x_{N+1},\cdots)\in U_1\times U_2\times\cdots\times U_N\times X_{N+1}\times\cdots)\subset U.$$

则

$$(x_1,x_2,\cdots,x_N,x_{N+1}^0,\cdots)\in Y_N\cap(U_1\times U_2\times\cdots\times U_N\times X_{N+1}\times\cdots)\subset Y\cap U.$$

因此 $Y\cap U\neq\varnothing$. 我们证明了 $x\in\mathrm{cl}\,Y$. 由 $x\in X$ 的任意性知 $\mathrm{cl}\,Y=X$. 证毕.

推论 3.1.4 $\mathbb{R}^n,\mathbf{I}^n,\mathbf{J}^n,\mathbf{B}^n,\mathbb{S}^n(n\geqslant 1)$ 均为连通空间, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\mathbf{I}^{\mathbb{N}},\mathbf{J}^{\mathbb{N}}$ 也为连通空间.

证明 由推论 3.1.1 知, 当 $n=1$ 时, $\mathbb{R}^n,\mathbf{I}^n,\mathbf{J}^n,\mathbf{B}^n$ 都是连通的.

由定理 3.1.8 知, 对任意的 $n\in\mathbb{N}\cup\{\omega\}$, $\mathbb{R}^n,\mathbf{I}^n,\mathbf{J}^n$ 是连通的; 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 由于 $\mathbf{B}^n$ 同胚于 $\mathbf{J}^n$, 故 $\mathbf{B}^n$ 也是连通的.

最后, 我们证明当 $n\geqslant 1$ 时, $\mathbb{S}^n$ 连通（注意, 当 $n=0$ 时, $\mathbb{S}^n=\{-1,1\}$ 不是连通的）. 令

$$\mathbb{S}_+^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{S}^n:x_{n+1}\geqslant 0\},$$

$$\mathbb{S}_-^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{S}^n:x_{n+1}\leqslant 0\}.$$

定义 $f:\mathbf{B}^n\to\mathbb{S}_+^n$ 为: 对任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{B}^n$, 令

$$f(x)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\right).$$

则 f 是同胚映射（请读者自证）, 因此 $\mathbb{S}_+^n$ 是连通的. 同理 $\mathbb{S}_-^n$ 也是连通的. 而 $\mathbb{S}_+^n\cap\mathbb{S}_-^n=\mathbb{S}^{n-1}\times\{0\}\neq\varnothing$（因为 $n\geqslant 1$）, 因此 $\mathbb{S}^n=\mathbb{S}_+^n\cup\mathbb{S}_-^n$ 是连通的. 证毕.

下面再给出 $\mathbb{R}^n$ 中几个连通集的例子.

例 3.1.6 当 $n \geqslant 2$ 时, 对任意可数集 $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \setminus A$ 是连通的.

事实上, 固定 $b \in \mathbb{R}^n \setminus A$, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n \setminus (A \cup \{b\})$, 令 l 为连接 b, x 的线段的中垂线. 对任意的 $y \in l$, 用 $M(x, y)$ 表示连接点 b, y, x 的折线（见图 3-1）. 则对任意的 $y_1, y_2 \in l$, 若 $y_1 \neq y_2$, 则

$$M(x, y_1) \cap M(x, y_2) = \{b, x\}.$$

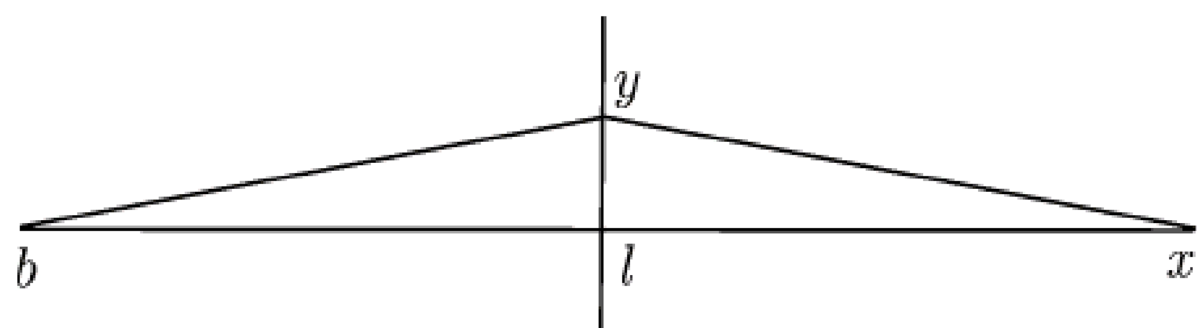


图 3-1 $M(x, y)$

假设对任意的 $y \in l, M(x, y) \cap A \neq \varnothing$, 选择 $f(y) \in M(x, y) \cap A$, 则 $f(y) \notin \{b, x\}$. 故 $f: l \to A$ 是单射. 此矛盾于 l 的基数是不可数的, 而 A 是可数的. 因此, 存在 $y(x) \in l$ 使得 $M(x, y(x)) \cap A = \varnothing$. 令 $l(x) = M(x, y(x))$, 则 $l(x)$ 是 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 的连通子集. 进一步, 对任意的 $x, x' \in \mathbb{R}^n \setminus (A \cup \{b\})$, $l(x) \cap l(x') \ni b$, 故 $\mathbb{R}^n \setminus A = \bigcup \{l(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus (A \cup \{b\})\}$ 是连通的.

特别地, 取 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有坐标为有理数的点之集, 则 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 连通.

推论 3.1.5 当 $n \geqslant 2$ 时, $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 不同胚.

证明 反设 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 同胚, 并设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 是一一对应且 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 和 $f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 都连续, 则 $f|\mathbb{R} \setminus \{0\}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ 也是同胚的. 但由于 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 不是区间知 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 不是连通的, 而由上例 $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ 是连通的, 此为矛盾. 证毕.

注 3.1.4 事实上, 对任意的 $n \neq m$, $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 均不同胚. 但它的证明要困难得多.

最后, 我们给出下面的樊畿定理.

定理 3.1.9（樊畿定理） 度量空间 (X, d) 是连通的充分必要条件是对 X 的任意开集族 $\mathcal{U}$, 如果 $\bigcup \mathcal{U} = X$, 则对任意的 $x, y \in X$, 存在 $\mathcal{U}$ 的有限子族 $\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ 使得 $x \in U_1, y \in U_n$ 且对任意的 $i < n$ 有 $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$.

证明 条件的充分性是显然的, 下面证明条件是必要的. 设 X 是连通的,

$\mathcal{U}$ 是 X 的开集族且 $\bigcup\mathcal{U}=X$. 对任意的 $x\in X$, 令

$$U(x)=\{y\in X:\text{存在}\mathcal{U}\text{的有限子族}\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}\text{使得 }x\in U_1,y\in U_n\text{ 且}$$
$$\text{对任意的 }i<n\text{ 有 }U_i\cap U_{i+1}\neq\varnothing\}$$

则容易验证 $U(x)$ 是包含 x 的开集. 又显然 $U(x)\cap U(y)\neq\varnothing$ 能推出 $U(x)=U(y)$. 所以 $\{U(x):x\in X\}$ 构成 X 的由开集构成的分划. 由 X 是连通的知, 对任意的 $x\in X$ 有 $U(x)=X$, 也即条件是必要的. 证毕.

练 习 3.1

3.1.A. 如果 (X,d) 是连通的度量空间, 那么, 对任意的 $\varepsilon>0$ 以及任意的 $x,y\in X$, 存在 $x_0=x,x_1,\cdots,x_n=y\in X$, 使得对任意的 $i=1,2,\cdots,n$, 有 $d(x_{i-1},x_i)<\varepsilon$. 反之, 成立吗?

3.1.B. 设 (X,d) 是连通的度量空间, A 是连通子集. 如果 $X\setminus A=U\cup V$, 这里 U,V 是 X 的不相交的开集. 证明此时 $A\cup U$ 和 $A\cup V$ 是连通的.

3.1.C. 设 $f:X\to Y$ 连续. 如果对任意的 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是空集或者是连通的, 则称 f 是**单调的连续映射**. 证明: 如果 $X=Y=\mathbb{R}$, 那么, 此处的单调性和分析学中定义的单调性一致.

3.1.D. 设 $f:X\to Y$ 是单调开连续映射, C 是 Y 中闭连通子集, 证明 $f^{-1}(C)$ 是连通的.

3.1.E. 设 A,B 是度量空间 (X,d) 的隔离子集, 证明存在不相交的开集 U,V 使得 $A\subset U,B\subset V$.

3.2 连通分支与局部连通空间

本节将讨论连通分支的性质并定义局部连通性.

设 X 是度量空间, $x\in X$. 我们希望找一个包含 x 的 X 的最大连通子集, 称之为 x 的连通分支. 设 X 是度量空间, $x,y\in X$, 若存在 X 中的连通集 C 使得 $x,y\in C$, 则称点 x,y **在 X 中连通**.

定理 3.2.1 设 X 是度量空间，$x\in X$. 令

$$C=\{y\in X:x,y\text{在}X\text{中连通}\},$$

则 C 是 X 中包含 x 的最大连通子集且 C 为 X 中的闭集.

证明 设 $y\in C$，则存在连通子集 $C_y\ni x,y$. 读者不难证明

$$C=\bigcup\{C_y:y\in C\}.$$

因为 $\bigcap\{C_y:y\in C\}\ni x$，故由定理 3.1.5 知 C 是包含 x 的连通子集. 现在我们证明 C 是包含 x 的最大连通子集.

事实上，设 $D\ni x$ 是 X 的连通子集，则由定义知，对任意的 $y\in D, x,y$ 在 X 中连通，因此 $y\in C$. 故 $D\subset C$. 又由于连通集的闭包也是连通的，故 $\mathrm{cl}\,C$ 也是包含 x 的连通子集. 因此，由 C 的最大性知，$\mathrm{cl}\,C=C$，即 C 为闭的. 证毕.

定义 3.2.1 设 X 是度量空间，$x\in X$. 称 X 中包含 x 的最大连通子集为 ***x* 所在的连通分支**，用 $C_X(x)$ 或者 $C(x)$ 记 x 所在的连通分支.

定理 3.2.2 设 X 是度量空间，则 X 的任何两个连通分支或者是重合的或者是不相交的.

利用定理 3.1.5 及连通分支的最大性立即可得. 证明略.

推论 3.2.1 设 X 是度量空间，则 X 的所有连通分支所构成的族是 X 的一个由闭集构成的分划.

我们当然希望这个族中的成员也是开集，这样的话，我们就可以通过仅考虑其连通子集弄清任意度量空间的拓扑性质，但不幸的是，此结论不真. 例如，$X=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，作为 $\mathbb{R}$ 的子空间，(X,d) 是度量空间. 显然，在 (X,d) 中包含任意一个点的连通集仅有由这个点组成的单点集，所以 (X,d) 连通分支的全体为

$$\{\{x\}:x\in X\}.$$

特别地，$\{0\}$ 是 (X,d) 的一个连通分支，但不是 (X,d) 的开集（其余的连通分支均为既开又闭集）. 进一步，令 ρ 是集合 X 上的离散度量，那么，(X,ρ) 与 (X,d) 有完全相同的连通分支而且这些连通分支是同胚的（都是单点

集），但是，度量空间 (X,ρ) 与 (X,d) 是不同胚的.

下面探讨在什么条件下连通分支都是既开又闭的.

定义 3.2.2 设 X 是度量空间，$x\in X$，若对任意的 $U\in\mathcal{N}(x)$，存在连通集 $V\in\mathcal{N}(x)$，使得 $V\subset U$，则称 X **在 x 点是局部连通的**. 若 X 在每一个点都是局部连通的，则称 X 为**局部连通的度量空间**.

非单点的离散度量空间是局部连通的但非连通的. 因此，由局部连通性不能推出连通性，我们应该认为这是正常的结论. 但令人多少有点惊讶的是，连通的度量空间，甚至 $\mathbb{R}^2$ 中的连通子集，都可以不是局部连通的. 下面著名的例子称为为**拓扑学家的正弦曲线**.

例 3.2.1 令 $X=(\{0\}\times[-1,1])\cup\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right):0<x\leqslant\frac{1}{\pi}\right\}$. 如图 3-2 所示. 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间，X 是我们需要的例子.

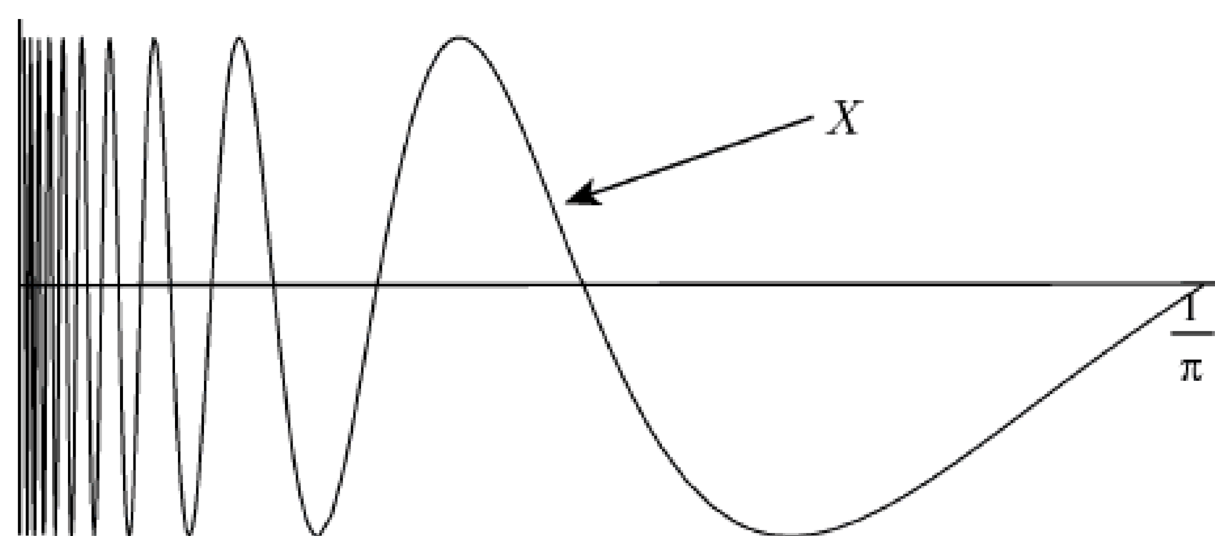


图 3-2 拓扑学家的正弦曲线

首先证明 X 是连通的，令 $f:\left(0,\frac{1}{\pi}\right]\to\mathbb{R}^2$ 为

$$f(x)=\left(x,\sin\frac{1}{x}\right),$$

则由定理 2.6.9 知 f 是连续的，故 $X_1=f\left(\left(0,\frac{1}{\pi}\right]\right)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子集. 显然，$X=\mathrm{cl}\,X_1$，故 X 也是连通的.

其次证明在 $X\setminus X_1$ 中的每一个点都不是局部连通的，因此 X 不是局部连通的. 例如，选择 $(0,0)\in X\setminus X_1$，$\varepsilon<\frac{1}{\pi}$，则 $B((0,0),\varepsilon)$ 是由一些互不相交的曲线段组成的，大致如图 3-3 所示. 它不包含 $(0,0)$ 的任何连通邻域，故 X 在 $(0,0)$ 点不是局部连通的.

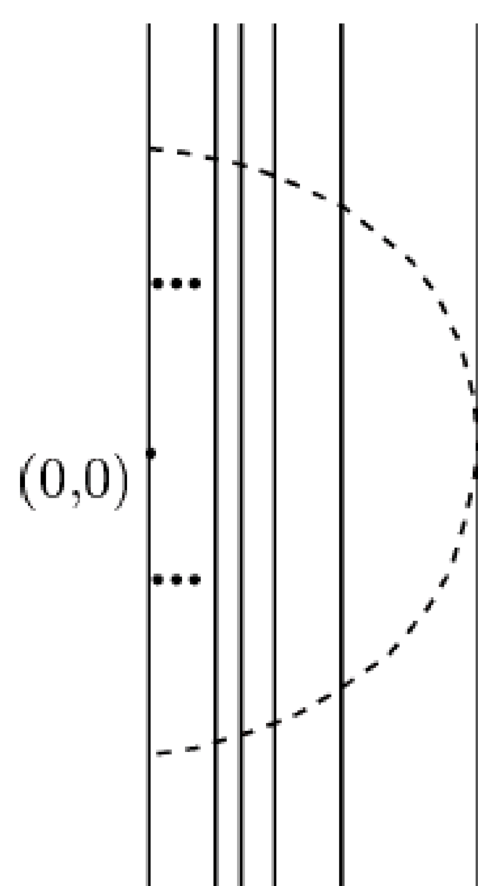


图 3-3 连通不局部连通的例子 1

下面再给出 $\mathbb{R}^2$ 中一个这样的子集: 令

$$X=(\{0,1\}\times\mathbf{I})\cup\left(\mathbf{I}\times\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}\right)$$

如图 3-4 所示.

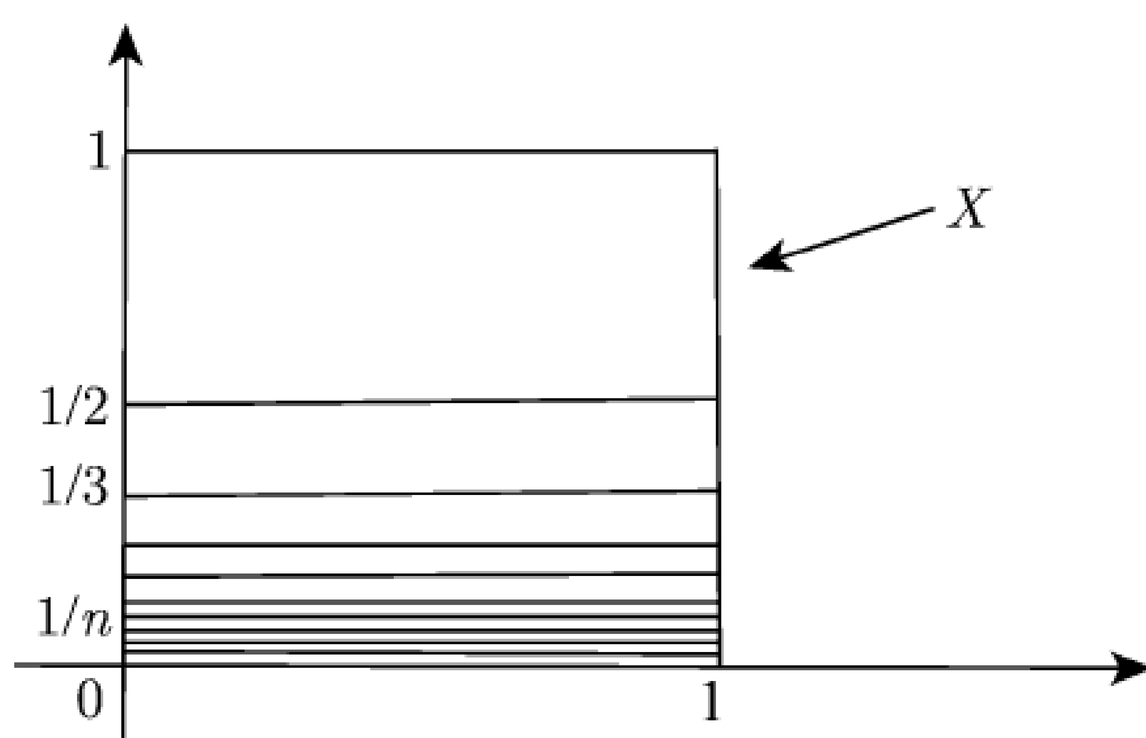


图 3-4 连通不局部连通的例子 2

很容易验证 X 是连通的, 但它在 $(0,1)\times\{0\}$ 中的点处不是局部连通的.

下面的定理说明局部连通空间的连通分支都是既开又闭的.

定理 3.2.3 设 X 是度量空间, 则下列条件等价:

(1) X 是局部连通的;

(2) X 的任意开子空间的任意连通分支都是开的;

(3) X 有一个由连通开集构成的基.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $U\subset X$ 是 X 的开子空间, C 是 U 的一个连通分支. 对任意的 $x\in C\subset U$, 由于 U 是 x 点的一个邻域且 X 是局部连通的, 故存在连通开集 V 使得 $x\in V\subset U$. 由于 C 是 U 中包含 x 点的最大连通集, 故

$V \subset C$. 由此说明 C 是 U 中的开集, 同时也是 X 中的开集.

(2) $\Rightarrow$ (3). 令 $\mathcal{B}$ 是 X 中所有连通的开集, 我们证明由 (2) 可以推出 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个基, 从而 (3) 成立. 设 $x \in X, U \ni x$ 是开集, 则由 (2) 知, x 在 U 中的连通分支 C 是开集 (既在 U 中, 又在 X 中), 故 $x \in C \subset U$ 且 C 是连通开集. 所以 $C \in \mathcal{B}$, 由此说明 $\mathcal{B}$ 是 X 的基.

(3) $\Rightarrow$ (1) 是显然的. 证毕.

下面考察局部连通空间的运算性质.

定理 3.2.4 设 X 是局部连通的度量空间, Y 是度量空间, $f: X \to Y$ 是连续的开满映射, 则 Y 也是局部连通的.

请读者自证.

定理 3.2.5 设 $(X_n : n = 1, 2, \cdots)$ 是一列 (有限或无限) 度量空间, X 是其乘积, 则 X 是局部连通的充分必要条件是每一个 X_n 都是局部连通的, 且除有限个外, X_n 也是连通的.

证明 必要性. 设 X 是局部连通的, 由定理 2.6.11 和定理 3.2.4 知每一个 X_n 都是局部连通的. 我们进一步证明, 除有限个外, X_n 也是连通的. 选择 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in X$, 设 C 是 x 点所在的连通分支. 由假设和定理 3.2.3 知, $C \ni x$ 是开集. 由定理 2.6.10 知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 和 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 中的开集 $U_1, U_2, \cdots, U_N$ 使得

$$x \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N \times X_{N+1} \times \cdots \subset C.$$

用 $p_n : X \to X_n$ 表示向第 n 个空间的投影映射. 则对任意的 $n > N$,

$$X_n = p_n(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N \times X_{N+1} \times \cdots) \subset p_n(C).$$

故 $X_n = p_n(C)$. 由于 C 是连通的, 所以 X_n 也是连通的. 由此说明, 除前 N 个外, X_n 均是连通空间.

充分性. 设存在 N 使得对任意的 $n > N$, X_n 是连通的, 且设每一个 X_n 都是局部连通的. 由定理 3.2.3 知, 对任意的 n, 存在 X_n 的基 $\mathcal{B}_n$, 它的每一个成员都是连通的. 令

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m \times X_{m+1} \times \cdots : U_1 \in \mathcal{B}_1, U_2 \in \mathcal{B}_2, \cdots, U_m \in \mathcal{B}_m; m \geqslant N\}$$

利用与定理 2.6.10 相同的证明方法可以证明 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个基. 由定理 3.1.8 知, $\mathcal{B}$ 中每一个成员都是连通的. 从而, 应用定理 3.2.3, X 是局部连通的. 证毕.

定理 3.2.6 局部连通空间的每一个开子空间都是局部连通的.

请读者自证.

例子 3.2.1 说明局部连通空间的闭子空间可以不是局部连通的. 最后, 我们给出局部连通的一个充分必要条件.

定理 3.2.7 设 (X,d) 是度量空间, 则 X 是局部连通的充分必要条件是: 对任意的 $x \in X$ 及 $U \in \mathcal{N}(x)$, 存在连通的子集 A 使得 $x \in \operatorname{int} A \subset A \subset U$.

证明 条件的必要性是显然的. 我们证明条件也是充分的. 对任意的 $x \in X$ 及 $U \in \mathcal{N}(x)$, 由假设存在连通的子集 A 使得

$$x \in \operatorname{int} A \subset A \subset U .$$

现在, 对任意 $y \in A$, 由于 $U \in \mathcal{N}(y)$, 故由假设, 存在连通的子集 A_y 使得

$$y \in \operatorname{int} A_y \subset A_y \subset U .$$

令 $U_1 = \bigcup\{\operatorname{int} A_y : y \in A\}, B_1 = \bigcup\{A_y : y \in A\}$, 则

$$A \subset U_1 \subset B_1 \subset U \text{ 且 } U_1 \text{ 是开集.}$$

注意到

$$B_1 = A \bigcup B_1 = A \bigcup \bigcup\{A_y : y \in A\}.$$

应用定理 3.1.5 知 B_1 是连通集. 重复以上过程, 我们可以归纳地定义开集列 $(U_n)_n$ 和连通子集列 (B_n) 使得

$$A \subset U_n \subset B_n \subset U_{n+1} \subset B_{n+1} \subset U.$$

令 $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, 则 $V \in \mathcal{N}(x)$ 且为包含于 U 的连通集. 证毕.

注 3.2.1 注意上面的定理并不是说, 对固定的 $x_0 \in X$, 如果对任意的 $U \in \mathcal{N}(x_0)$, 存在连通的子集 A 使得 $x_0 \in \operatorname{int} A \subset A \subset U$, 则 X 在 x_0 点局部连通. 现在陈述的命题是不正确的, 见练习 3.2.F.

练 习 3.2

3.2.A. 证明对乘积空间 $\prod_{n=1}^{N} X_n$（这里 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$）中的点 $x=(x_n)$, x 的连通分支为 $C(x)=\prod_{n=1}^{N} C_{X_n}(x_n)$.

设 (X,d) 是度量空间，$x \in X$，所有包含 x 点的既开又闭的集合之交称为 x 的**伪连通分支**. 用 $Q(x)$ 表示 x 的伪连通分支，请完成下面的 3.2.B 至 3.2.D 的证明.

3.2.B. 证明 $Q(x)$ 是 X 的闭集. 并证明：对任意的 $x, y \in X$，$Q(x)=Q(y)$ 或者 $Q(x) \cap Q(y)=\varnothing$.

3.2.C. 证明：对任意的 $x \in X$，$C(x) \subset Q(x)$. 举例说明 $C(x)=Q(x)$ 可以不成立.

（提示：考虑 $\mathbb{R}^2$ 的子空间：$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{I} \times \left\{\frac{1}{n}\right\} \bigcup \{(0,0),(0,1)\}$.）

3.2.D. 如果 X 是 $\mathbb{R}$ 的子空间，则对任意的 $x \in X$, $C(x)=Q(x)$.

3.2.E. 证明存在 $\mathbb{R}^2$ 的连通子空间 X 使得 X 可以表示为两两不相交的可数多个闭集之并.

（提示：构造一列两两不相交的 $\mathbb{R}^2$ 的子集 (I_n) 以及 $x_n \in I_n$ 满足下列条件：

(i) 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $I_n \approx \mathbf{I}$;

(ii) 对任意的 $n, m \in \mathbb{N}$，如果 $m > n$，那么 $d(x_n, I_m) < \frac{1}{m}$.

令 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$）.

3.2.F. 对于 $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$，用 $\overline{(a,b),(c,d)}$ 表示连接点 $(a,b),(c,d)$ 的线段. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$，令

$$X_n=\overline{\left(\frac{1}{n},0\right),\left(\frac{1}{n+1},0\right)} \cup \bigcup_{m=n}^{\infty} \overline{\left(\frac{1}{n},0\right),\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{m}\right)},$$

作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间. 我们定义 $X=\{(0,0)\}\bigcup\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$. 如图 3-5 所示. 证明:

(1) X 是连通的;

(2) 对于点 $(0,0)$ 的任意邻域 U, 存在连通的子集 A 使得 $(0,0)\in \operatorname{int} A\subset A\subset U$;

(3) X 不存在连通的开集 V 使得 $(0,0)\in V\subset B((0,0),1)$.

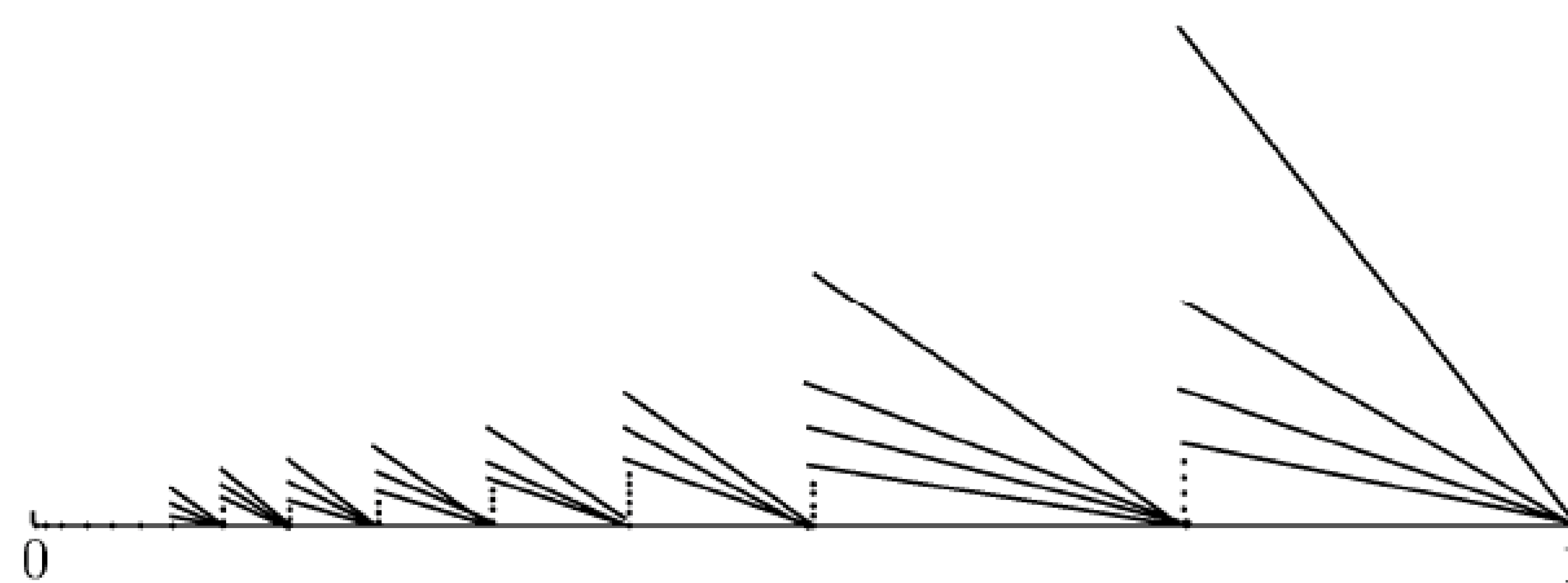


图 3-5　X 的定义

3.3 道路连通空间

道路连通空间是另一类非常有用的连通性质. 本节将定义这个概念并讨论其与连通性的关系.

定义 3.3.1 设 X 是度量空间, 每一个由 $\mathbf{I}$ 到 X 的连续映射 $f:\mathbf{I}\to X$ 称为 X 中的一条**道路**, 其中 $f(0)$ 和 $f(1)$ 分别称为这条道路的**起点**和**终点**. 当 $f(0)=f(1)$ 时, 称这条道路为**闭路**或者**圈**. 若对 X 中任意两点 x,y 都存在道路 $f:\mathbf{I}\to X$ 使得 $f(0)=x$ 且 $f(1)=y$, 则称 X 为**道路连通的度量空间**.

利用定理 3.1.5 和定理 3.1.7, 容易验证, 每一个道路连通的空间都是连通的. 3.2 节中拓扑学家的正弦曲线是一个连通空间而非道路连通的例子（请自证）. 对拓扑学家的正弦曲线 X 做一个改造可以得到例子说明道路连通的空间可以不是局部连通的. 事实上, 在 $\mathbb{R}^2$ 中用一条道路连接 $(0,0)$ 和 $\left(\frac{1}{\pi},0\right)$, 使得这条道路的像除起点和终点外无 X 中的其他点, 这条道路的像与 X 的并可得到 $\mathbb{R}^2$ 的子空间, 记为 Y, 那么 Y 是道路连通的空间但不是局部连通的（请自证）.

下面说明道路连通空间的运算情况.

定理 3.3.1 道路连通空间的连续像是道路连通空间.

请读者自证.

定理 3.3.2 设 $\{X_n:n=1,2,\cdots\}$ 是一列（有限或无限）度量空间, X 是其乘积, 则 X 是道路连通的当且仅当每一个 X_n 是道路连通的.

证明 条件的必要性由上述定理立得. 设每一个 X_n 是道路连通的, $x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots)\in X$, 则对任意的 n, 存在道路 $f_n:\mathbf{I}\to X_n$ 使得 $f_n(0)=x_n$, $f_n(1)=y_n$. 现在定义 $f:\mathbf{I}\to X$ 为: 对任意的 $t\in\mathbf{I}$,

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots)$$

则由定理 2.6.12 知 $f:\mathbf{I}\to X$ 是连续的且 $f(0)=x,f(1)=y$. 证毕.

像定义连通分支一样, 可以定义道路连通分支.

定义 3.3.2 设 X 是度量空间, $x\in X$, 令

$$P_X(x)=\{y\in X:\text{存在 } X \text{ 中以 } x \text{ 为起点、以 } y \text{ 为终点的道路}\}.$$

称 $P_X(x)$ 为 X 中 x 所在的**道路连通分支**. 除非有必要, 我们总是简记 $P_X(x)$ 为 $P(x)$.

定理 3.3.3 设 X 是度量空间, $x, y \in X$, 则

$$P(x)=P(y) \quad \text{或者} \quad P(x)\cap P(y)=\varnothing.$$

证明 设 $P(x)\cap P(y)\neq\varnothing$, 选择 $z\in P(x)\cap P(y)$, 则存在连续映射 $f, g:\mathbf{I}\to X$ 使得

$$f(0)=x,\ f(1)=z,\ g(0)=y,\ g(1)=z.$$

现在定义: $h:\mathbf{I}\to X$ 为

$$h(t)=\begin{cases} f(2t), & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ g(2-2t), & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

则由于 $f(1)=z=g(1)$, 故按上式和下式定义的 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 是相同的. 所以由黏结引理 (推论 2.7.8) 知 h 是连续的. 又显然

$$h(0)=f(0)=x, h(1)=g(0)=y,$$

故存在一条以 x 为起点、以 y 为终点的道路, 所以 $y\in P(x)$.利用同样的方法可以证明 $P(y)$ 中任何一点都在 $P(x)$ 中, 所以

$$P(y)\subset P(x).$$

对称地,

$$P(x)\subset P(y).$$

所以 $P(x)=P(y)$. 证毕

每一个度量空间都被它的道路连通分支分划为若干互不相交的道路连通子空间. 拓扑学家的正弦曲线说明道路连通分支和连通分支可以是不同的, 但我们有下面的特例成立.

定理 3.3.4 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子空间, 则其道路连通分支和连通分支重合.

证明 设 $x\in U$, 则显然 $P(x)\subset C(x)$. 由于 $\mathbb{R}^n$ 是局部连通的, 从而 U 也是. 因此 $C(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 下面证明对任意的 $y\in C(x)$, $P(y)$ 是 $C(x)$ 中的开集. 事实上, 若 $y\in C(x)$, 则 $C(x)=C(y)\supset P(y)$. 又对任意的 $z\in P(y)$, 选择充分小的 $\varepsilon>0$ 使得 $B(z,\varepsilon)\subset C(x)$. 由于 $B(z,\varepsilon)$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$, 所以 $B(z,\varepsilon)$ 中的任意点都和 z 可以道路连通, 从而和 y 可以道路连通, 即

$$B(z,\varepsilon)\subset P(y).$$

此说明 $P(y)$ 是 $C(x)$ 中的开集. 由于 $\{P(y)\}$ 把 $C(x)$ 划分成互不相交的若干道路连通的子空间且每一个子空间均为开的, 从而每一个子空间也是 $C(x)$ 中的闭子集. 因此, 由 $C(x)$ 是连通的知, $C(x)=P(x)$ (也就是事实上只有一块). 证毕.

推论 3.3.1 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 U 是连通的当且仅当其是道路连通的.

和局部连通性类似, 我们可以定义局部道路连通性.

定义 3.3.3 设 (X,d) 是度量空间, $x_0\in X$, 如果对任意的 $U\in\mathcal{N}(x_0)$, 都存在道路连通的 $V\in\mathcal{N}(x_0)$ 使得 $V\subset U$, 则称 X **在 x_0 点局部道路连通**. 如果 (X,d) 在每一点都是局部道路连通的, 则称 X **是局部道路连通的度量空间**.

关于局部道路连通性的性质留给读者, 我们仅证明下面两个定理:

定理 3.3.5 局部道路连通的连通空间是道路连通的.

证明 设 (X,d) 是局部道路连通的连通空间且 $x\in X$. 为完成定理的证明, 我们仅需证明 $X=P(x)$. 因为 X 是连通的, 为此, 我们仅需要验证 $P(x)$ 是 X 的既开又闭集合. 由于 X 是局部道路连通的, 每一个点一定存在道路连通的邻域, 因此 $P(x)$ 是开的. 又, 对任意的 $y\in\operatorname{cl}P(x)$, $P(y)\in\mathcal{N}(y)$, 因此, $P(x)\cap P(y)\neq\varnothing$, 故利用定理 3.3.3 知, $P(x)=P(y)$, 即 $y\in P(x)$. 所以 $P(x)$ 是闭的. 证毕.

定理 3.3.6 设 (X,d) 是度量空间, 如果对任意的 $x\in X$ 及 $U\in\mathcal{N}(x)$, 存在道路连通的子集 A 使得 $x\in\operatorname{int}A\subset A\subset U$, 则 X 是局部道路连通的.

仿照定理 3.2.7 可以证明, 留给读者. 证明略.

练 习 3.3

3.3.A. 设 Y 是 X 的子空间, $x\in Y$. 证明 $C_Y(x)\subset C_X(x)$, $P_Y(x)\subset P_X(x)$.

3.3.B. 证明对乘积空间 $\prod_{n=1}^{N}X_n$ (这里, $N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$) 中的点 $x=(x_n)$, x 的道路连通分支为 $P(x)=\prod_{n=1}^{N}P_{x_n}$, 这里 P_{x_n} 是 x_n 在 X_n 中的道路连通分支.

3.3.C. 如果 X 是 $\mathbb{R}$ 的子空间, 则对任意的 $x\in X$, $C(x)=P(x)$.

第 4 章 无限维拓扑学引论

本章将给出无限维拓扑学的一些基本知识, 特别是引入 Z-集的概念并证明 Hilbert 方体中 Z-集的同胚扩张性质. 并利用这些性质证明本章的主要结果：Anderson 定理, 即 Hilbert 空间l ^{2} 同胚于¡ $^{¥}$.

为了方便, 我们总是用 $Q=\prod_{n=1}^{\infty}J_n$ （这里 $J_n=J=[-1,1]$）表示 Hilbert 方体. 对任意的 $(x_n),(y_n)\in Q$,

$$d((x_n),(y_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n}$$

是 Q 上选定的相容度量. 对于 $A\subset$¥ , 令 $p_A:Q\to\prod_{n\in A}\mathbf{J}_n$ 为投影映射, 即对任意的 $x\in Q$,

$$p_A(x)=x\,|\,A.$$

特别地, 对任意的 n, $p_n(x)=x(x)$.

为了本章陈述方便, 我们如下定义了开覆盖、紧度量空间和完备度量空间等概念.

定义 4.0.1 设 X 是集合, $A\subset X$, $\mathcal{B}$ 是 X 的一个子集族, 若 $\bigcup\mathcal{B}\supset A$, 则称 $\mathcal{B}$ 为 A 的一个**覆盖**. 若 $\mathcal{B}$ 的子集 $\mathcal{B}_0$ 也是 A 的一个覆盖, 则称 $\mathcal{B}_0$ 为 $\mathcal{B}$ 的对于 A 的一个**子覆盖**. 进一步, 若 $\mathcal{B}_0$ 是有限族, 则称 $\mathcal{B}_0$ 是 $\mathcal{B}$ 的对于 A 的一个**有限子覆盖**. 进一步, 若假定(X, d)是度量空间, $\mathcal{B}$ 中成员均为 X 的开（闭）集, 则称 $\mathcal{B}$ 为 A 的开（闭）覆盖. 如果 $A=X$, 那么我们省略上面定义中的“对于 A”.

定义 4.0.2 设(X, d)是度量空间, 若 X 的任意开覆盖都存在有限子覆盖, 则称 X 为**紧度量空间**, 简称**紧空间**. 设 Y 是 X 的非空子集, 若 Y 作为 X 的子空间是紧的, 则称 Y 为 X 的**紧子集**.

定义 4.0.3 设(X, d)是度量空间, 若存在 X 上的完备度量 ρ 使得 $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_\rho$, 则称$(X, d)$是**可完备度量空间**. 可完备度量空间也被称为**拓扑完备的度量空间**.

显然, 度量空间是可完备度量的当且仅当它同胚于一个完备度量空间. 因此, 所有完备度量空间都是可完备度量的且可完备度量性是拓扑性质. 容易证明，可完备度量空间的闭子空间也是可完备度量的

4.1 构造同胚的三种方法及其应用

如何构造空间之间的同胚是拓扑学的中心工作, 本节将介绍三种方法, 这三种方法对无限维拓扑学非常重要, 也是我们后面构造同胚的基本工具和技巧. 在本节我们给出它们的直接应用以说明这些方法的有效性.

4.1.1 方法一: 同胚列的极限是同胚的条件

一般来说, 同胚列点态收敛的极限未必是同胚, 甚至可以不连续. 例如, 我们在分析学中熟悉的例子: 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=x^n:\mathbf{I}\to\mathbf{I}$ 是 I 到自己的同胚, 但是其极限不是连续的. 如果是同胚列一致收敛的极限, 情况又如何呢? 设 (X,ρ), (Y,d) 是紧度量空间, $C(X,Y,d)$ 是所有由 X 到 Y 的连续函数全体 $C(X,Y)$, 并赋予度量: 对任意的 $f,g\in C(X,Y)$,

$$d(f,g)=\sup\{d(f(x),g(x)):x\in X\}.$$

那么, 在这个度量空间中, 序列的收敛等价于一致收敛. 现在令

$$S(X,Y)=\{f\in C(X,Y):f(X)=Y\},$$

$$I(X,Y)=\{f\in C(X,Y):f\text{是单射}\},$$

$$H(X,Y)=S(X,Y)\cap I(X,Y),$$

$$H(X)=H(X,X).$$

即 $S(X,Y)$, $I(X,Y)$, $H(X,Y)$ 以及 $H(X)$ 分别表示 X 到 Y 的连续满射、连续单射和同胚映射的全体以及由 X 到自身的同胚映射的全体. 我们有下面简

单的引理.

引理 4.1.1 设 $(X,\rho),(Y,d)$ 是紧度量空间, 则 $S(X,Y)$ 是 $C(X,Y,d)$ 的闭集. 特别的, $\mathrm{cl}\,H(X,Y)\subset S(X,Y)$. 但 $\mathrm{cl}\,H(X,Y)\subset I(X,Y)$ 未必成立.

证明 设 $f\in C(X,Y)\setminus S(X,Y)$, 那么存在 $y\in Y$ 使得 $y\in Y\setminus f(X)$. 因为 $f(X)$ 是紧的, 故存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(y,\varepsilon)\cap f(X)=\varnothing$. 现在考虑 f 在 $C(X,Y,d)$ 中的邻域 $B\left(f,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$. 对任意的 $g\in B\left(f,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 和任意的 $x\in X$,

$$d(g(x),y)\geqslant d(f(x),y)-d(f(x),g(x))>\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, $y\notin g(X)$. 所以, $g\in C(X,Y)\setminus S(X,Y)$. 这说明 $C(X,Y)\setminus S(X,Y)$ 是开集.

下面说明 $\mathrm{cl}\,H(X)\subset I(X,X)$ 未必成立. 为此, 令 $X=\mathbf{I}$, 定义 $f:\mathbf{I}\to\mathbf{I}$ 为连接点$(0,0)$, $(0.5,1)$, $(1,1)$的折线, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $f_n:\mathbf{I}\to\mathbf{I}$ 为连接点$(0,0)$, $\left(0.5,\dfrac{n}{n+1}\right)$, $(1,1)$的折线, 如图 4-1 所示.

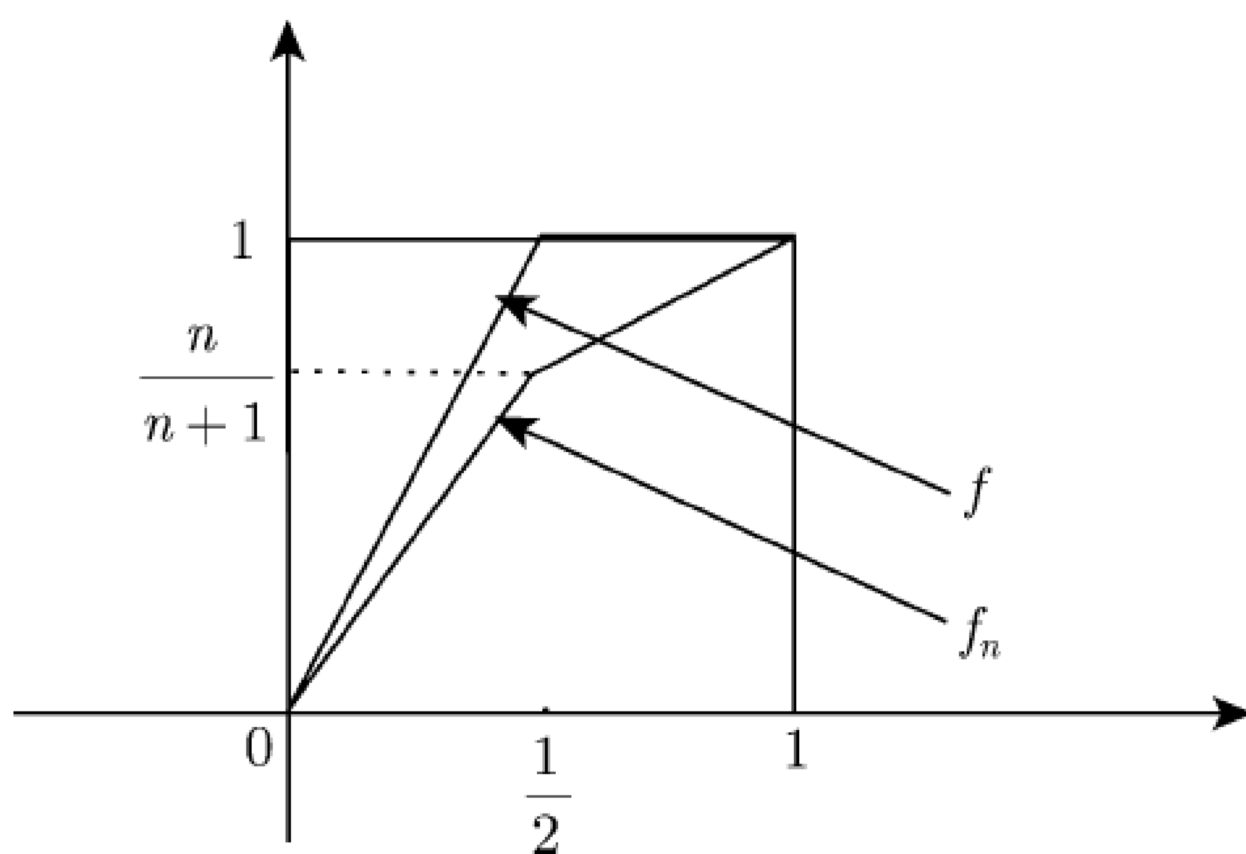


图 4-1 f_n,f 的定义

显然, $d(f,f_n)=\dfrac{1}{n+1}$. 所以, f 是序列(f_n)的极限. 注意到对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in H(X)$ 但 $f\notin I(X,X)$. 证毕.

因此, 紧度量空间之间的同胚列一致收敛的极限一定是连续满射, 但未必是单射. 我们探讨这样的极限才是同胚的条件. 为此, 对 $\varepsilon>0$, 令

$$S_\varepsilon(X,Y)=\{f\in S(X,Y):\text{对任意的 } y\in Y,\ \mathrm{diam}\,f^{-1}(y)<\varepsilon\}.$$

那么有下面简单的结论.

引理 4.1.2 对于紧度量空间 $(X,\rho),(Y,d)$, 有:

（1）对任意的 $\varepsilon > 0$，$S_\varepsilon(X,Y)$ 是 $S(X,Y)$ 的开集；

（2）$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{1/n}(X,Y) = H(X,Y)$.

证明 （1）设 (f_n) 是 $S(X,Y)\setminus S_\varepsilon(X,Y)$ 中的一个序列，且 $f_n \rightrightarrows f \in S(X,Y)$，则对任意的 n，存在 $y_n \in Y$ 使得

$$\operatorname{diam} f^{-1}(y_n) \geqslant \varepsilon .$$

因为 X 是紧的，故存在 $x_n, z_n \in f^{-1}(y_n)$ 使得

$$\rho(x_n, z_n) \geqslant \varepsilon .$$

又因为 X 是紧的度量空间，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ 存在，那么

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = f(z),$$

而且
$$\rho(x,z) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \geqslant \varepsilon .$$

由此说明 $f \in S(X,Y)\setminus S_\varepsilon(X,Y)$. 所以 $S_\varepsilon(X,Y)$ 是 $S(X,Y)$ 的开集.

（2）是显然的. 证毕.

引理 4.1.3 设 (X,d) 是完备度量空间，(A_n) 是 X 的一列子集，(x_n) 是 (X,d) 的序列. 如果对任意的 n，

$$d(x_n, x_{n+1}) < 3^{-n} \min\{d(x_i, A_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}, \tag{4-1-1}$$

那么 (x_n) 是 Cauchy 列且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

证明 显然，(x_n) 是 Cauchy 列. 对任意的 $n > m$，由假设，

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant 3^{-m} d(x_m, A_m) + \cdots + 3^{-n+1} d(x_m, A_m) \\ &\leqslant \frac{2}{3} d(x_m, A_m). \end{aligned}$$

因此，令 $n \to \infty$，得

$$d(x_m, \lim_{n\to\infty} x_n) < d(x_m, A_m).$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \notin A_m$. 最后，由 m 的任意性得到结论. 证毕.

利用这些引理，可以得到下面的定理.

定理 4.1.1 设 (X,d) 是紧度量空间, (h_n) 是 $H(X)$ 中的一个序列并满足下面的条件:

$$d(h_{n+1},\mathrm{id}_X)\leqslant 3^{-n}\min\{d(h_i\circ\cdots\circ h_1,S(X,X)\setminus S_{1/i}(X,X))\colon i=1,\cdots,n\}. \tag{4-1-2}$$

那么, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n\circ\cdots\circ h_1$ 存在且属于 $H(X)$.

证明 由引理 4.1.1 (1) 和引理 4.1.2, $(S(X,X),d)$ 是完备度量空间, $(S(X,X)\setminus S_{1/n}(X,X))$ 是这个空间中的闭集列. 对任意的 n, 令 $g_n=h_n\circ\cdots\circ h_1$, 则 (g_n) 是 $H(X)\subset S(X,X)$ 中的序列, 且由假设知

$$d(g_{n+1},g_n)\leqslant 3^{-n}\min\{d(g_i,S(X,X)\setminus S_{1/i}(X,X))\colon i=1,\cdots,n\}.$$

因此, 由引理 4.1.3 和引理 4.1.1 (2) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n\circ\cdots\circ h_1=\lim\limits_{n\to\infty}g_n$ 存在. 又

$$\lim_{n\to\infty}g_n\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}(S(X,X)\setminus S_{1/n}(X,X))=S(X,X)\setminus H(X).$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n\circ\cdots\circ h_1\in H(X)$. 证毕.

注 4.1.1 由上面的定理知道, 对于紧度量空间 X, 当我们定义的同胚列 $(h_n:X\to X)$ 中的每一项都和恒等映射接近到一定程度时, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n\circ\cdots\circ h_1$ 是同胚. 这个程度取决于前面已经定义的项. 我们可以称 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n\circ\cdots\circ h_1$ 为 $(h_n:X\to X)$ 的无限复合. 所以, 这个定理告诉我们如何用递归的方法定义同胚列使得其无限复合仍然是同胚. 关于后面的应用, 我们主要知道其每一项都和恒等映射接近的程度的存在性, 而不是这种程度的具体值. 也就是说, 在后面我们很少计算公式 (4-1-2) 右边的具体值.

下面给出定理 4.1.1 的一个直接应用. 令

$$s=(-1,1)^{\infty},\quad B(Q)=Q\setminus s,$$

分别称 i 为 Q 的**伪内部**和**伪边界**. 下面先给出一个引理.

引理 4.1.4 对任意的 $x,y\in s$, 存在 $h\in H(Q)$ 使得 $h(x)=y$.

引理 4.1.4 的证明留给读者. 我们的目的是证明上面引理的结论对任意

的 $x, y \in Q$ 成立. 为此, 令 $\mathbf{J}_n = [-1,1]$, 那么, $Q = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{J}_n$. 下面的引理在几何上是显然的, 如图 4-2 所示.

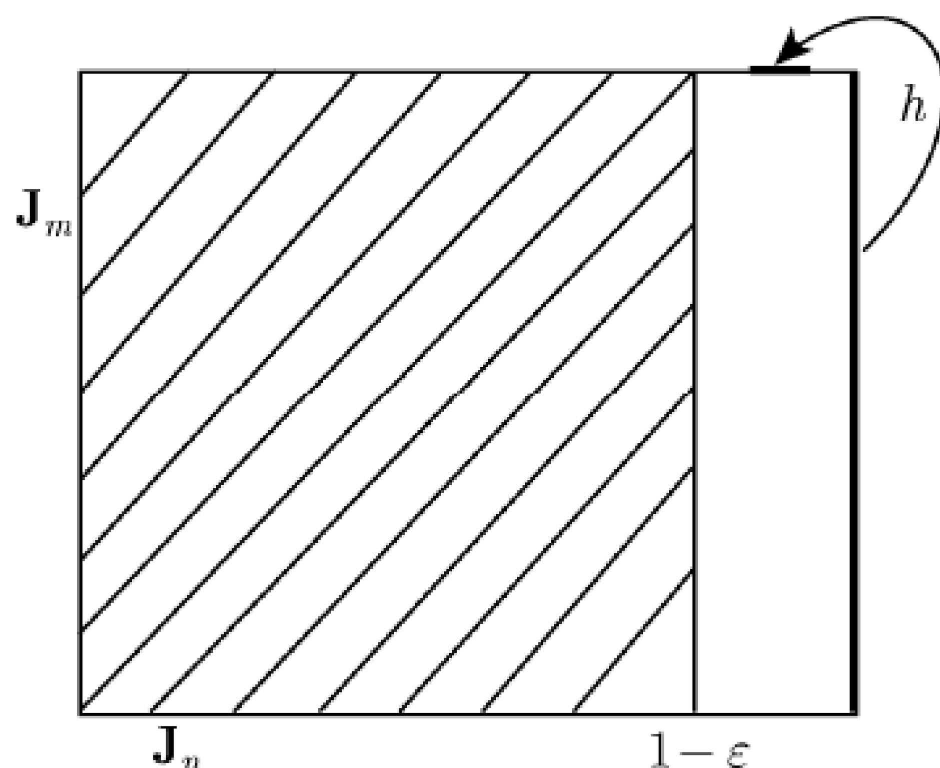


图 4-2 h 的定义

引理 4.1.5 对任意的 $\varepsilon \in (0,1)$ 和 $n \neq m$, 存在 $h \in H(\mathbf{J}_n \times \mathbf{J}_m)$ 使得

(1) $h|([-1,1-\varepsilon] \times \mathbf{J}_m) = \mathrm{id}_{[-1,1-\varepsilon]\times \mathbf{J}_m}$,

(2) 对任意 $x \in \mathbf{J}_n$, $p_n(h(1,x)) \in (0,1)$.

利用这个引理和定理 4.1.1, 我们有下面关键的引理.

引理 4.1.6 对任意的 $x \in Q$, $x^0 \in s$, 存在 $h \in H(Q)$ 使得 $h(x) \in s$ 且 $h(x^0) = x^0$.

证明 设 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in Q$. 我们归纳地定义 $H(Q)$ 的序列 (h_n) 使得

(i) $d(h_n, \mathrm{id}_Q)$ 充分小使得我们可以利用定理 4.1.1 保证 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n \circ \cdots \circ h_1 \in H(Q)$;

(ii) $(p_n \circ h_n \circ \cdots \circ h_1)(x) \in (-1,1)$;

(iii) h_n 不改变 Q 中任何点的前 $n-1$ 个坐标, 即对任意的 $(y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n, \cdots) \in Q$, 有

$$h_n(y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n, \cdots) = (y_1, \cdots, y_{n-1}, z_n, \cdots).$$

(iv) $h_n(x^0) = x^0$.

事实上, 如果 $x_1 \in (-1,1)$, 令 $h_1 = \mathrm{id}_Q$, 那么 (i) 至 (iv) 成立. 如果 $x_1 \in \{-1, 1\}$, 不妨假定 $x_1 = 1$, 选择 $\varepsilon > 0$ 充分小使得 $x_1^0 \in (-1, 1-\varepsilon)$. 由引理 4.1.5 知, 存在 $h_1^0 \in H(\mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_2)$ 满足引理 4.1.5 中的条件 (1) (2) . 那么 $h_1^0(x_1, x_2)$ 的第一个坐标属于 $(-1,1)$. 定义 $h_1 \in H(Q)$ 为

$$h_1(z_1,z_2,z_3,\cdots)=(y_1,y_2,z_3,\cdots),$$

这里, $(y_1,y_2)=h_1^0(z_1,z_2)$, 即 h_1 仅按照 h_1^0 改变 Q 中点的前两个坐标. 那么 h_1 满足（i）至（iv）.

假设 $h_1,h_2,\cdots,h_{n-1}\in H(Q)$ 已经定义并满足（i）至（iv）. 设 $h_{n-1}\circ\cdots\circ h_1(x)=(y_1,\cdots,y_{n-1},y_n,\cdots)$. 如果 $x_n\in(-1,1)$, 令 $h_n=\mathrm{id}_Q$, 那么（i）至（iv）成立. 如果 $x_n\in\{-1,1\}$, 同上不妨假定 $x_n=1$. 对任意的 $m>n$ 和 $\varepsilon>0$, 由引理 4.1.5 知存在 $h^{m,\varepsilon}\in H(\mathbf{J}_n\times\mathbf{J}_m)$ 满足引理 4.1.5 中的条件（1）（2）. 那么 $h^{m,\varepsilon}(y_n,y_m)$ 的第一个坐标属于 $(-1,1)$. 定义 $h_n\in H(Q)$ 为

$$h_n(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n,\cdots,z_m,z_{m+1},\cdots)=(z_1\cdots,z_{n-1},u_n,\cdots,u_m,z_{m+1},\cdots)$$

这里, $(u_n,u_m)=h^{m,\varepsilon}(z_n,z_m)$, 即 h_n 把 Q 中每一个点的第 n 个和第 m 个坐标按 $h^{m,\varepsilon}$ 映射, 其余的坐标不变. 那么 $h_n\in H(Q)$ 且满足（ii）和（iii）. 注意到

$$d(h_n,\mathrm{id}_Q)=\frac{|u_n-z_n|}{2^n}+\frac{|u_m-z_m|}{2^m}\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}+\frac{2}{2^m}.$$

因此, 我们能够选择充分大的 m 和充分小的 $\varepsilon>0$ 使得 h_n 也满足（i）和（iv）. 归纳定义完成.

应用定理 4.1.1, $h=\lim\limits_{n\to\infty}h_n\circ\cdots\circ h_1$ 是同胚且由（ii）至（iv）知, $h(x)\in s$ 且 $h(x^0)=x^0$. 证毕.

我们得到下面的定理.

定理 4.1.2 Q 是齐次的, 即对任意的 $x,y\in Q$, 存在同胚 $h:Q\to Q$ 使得 $h(x)=y$.

应用引理 4.1.4 和引理 4.1.6 即可. 证明略.

注 4.1.2 我们已经知道 $\mathbf{J}^n$ 不是齐次的. 进一步, 对于 $x,y\in\mathbf{J}^n$, 存在同胚 $h:\mathbf{J}^m\to\mathbf{J}^m$ 使得 $h(x)=y$ 的充分必要条件是 x,y 同时属于 $\mathrm{rint}(\mathbf{J}^m)=(-1,1)^m$ 或者同时属于 $\partial\mathbf{J}^m=\mathbf{J}^m\setminus\mathrm{rint}(\mathbf{J}^m)$. 因此, $\mathrm{rint}(\mathbf{J}^m)$ 中的点和 $\partial\mathbf{J}^m$ 中的点在 $\mathbf{J}^m$ 中的拓扑位置是不同的. 一般地, 分别称 $\mathrm{rint}(\mathbf{J}^m)$ 和 $\partial\mathbf{J}^m$ 为 $\mathbf{J}^m$ 的**径向内部**和**径向边界**. 但是, 由上面的定理我们知道, $\mathbf{J}^m$ 的"极限" Q 中任何两点在 Q 中的拓扑位置都是相同的. 所以, 虽然在前面我们相应地定义了 s 和 $B(Q)$, 但也仅仅称它们为 Q 的伪内部和伪边界.

4.1.2 方法二: Bing 收缩准则

对于紧度量空间 $(X,\rho),(Y,d)$, 引理 4.1.1 说明了在 $C(X,Y,d)$ 中, $\mathrm{cl}\,H(X,Y)\subset S(X,Y)$, 但是 $\mathrm{cl}\,H(X,Y)\subset I(X,Y)$ 未必成立.

定义 4.1.1 设 $(X,\rho),(Y,d)$ 是紧度量空间, 我们称 $\mathrm{cl}\,H(X,Y)$ 中的成员为由 X 到 Y 的**近似同胚**. 即 $f:X\to Y$ 是近似同胚当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$, 存在同胚 $h:X\to Y$ 使得

$$d(f,h)<\varepsilon.$$

近似同胚一定是连续满射. 如果紧空间 X, Y 之间存在近似同胚, 那么它们是同胚的. 但是, 按定义证明近似同胚的存在性有时是很困难的. Bing 收缩准则给出了满射是近似同胚的一个容易判断的等价条件.

定义 4.1.2 设 $f:X\to Y$ 是紧度量空间 (X,ρ) 到紧度量空间 (Y,d) 的连续满射, 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在同胚 $h:X\to X$ 使得

(1) $d(f,f\circ h)<\varepsilon$;

(2) 对任意的 $y\in Y$, $\mathrm{diam}\,h(f^{-1}(y))<\varepsilon$, 即 $f\circ h^{-1}\in S_\varepsilon(X,Y)$,

则称 f 是**可收缩的**. 如图 4-3 所示.

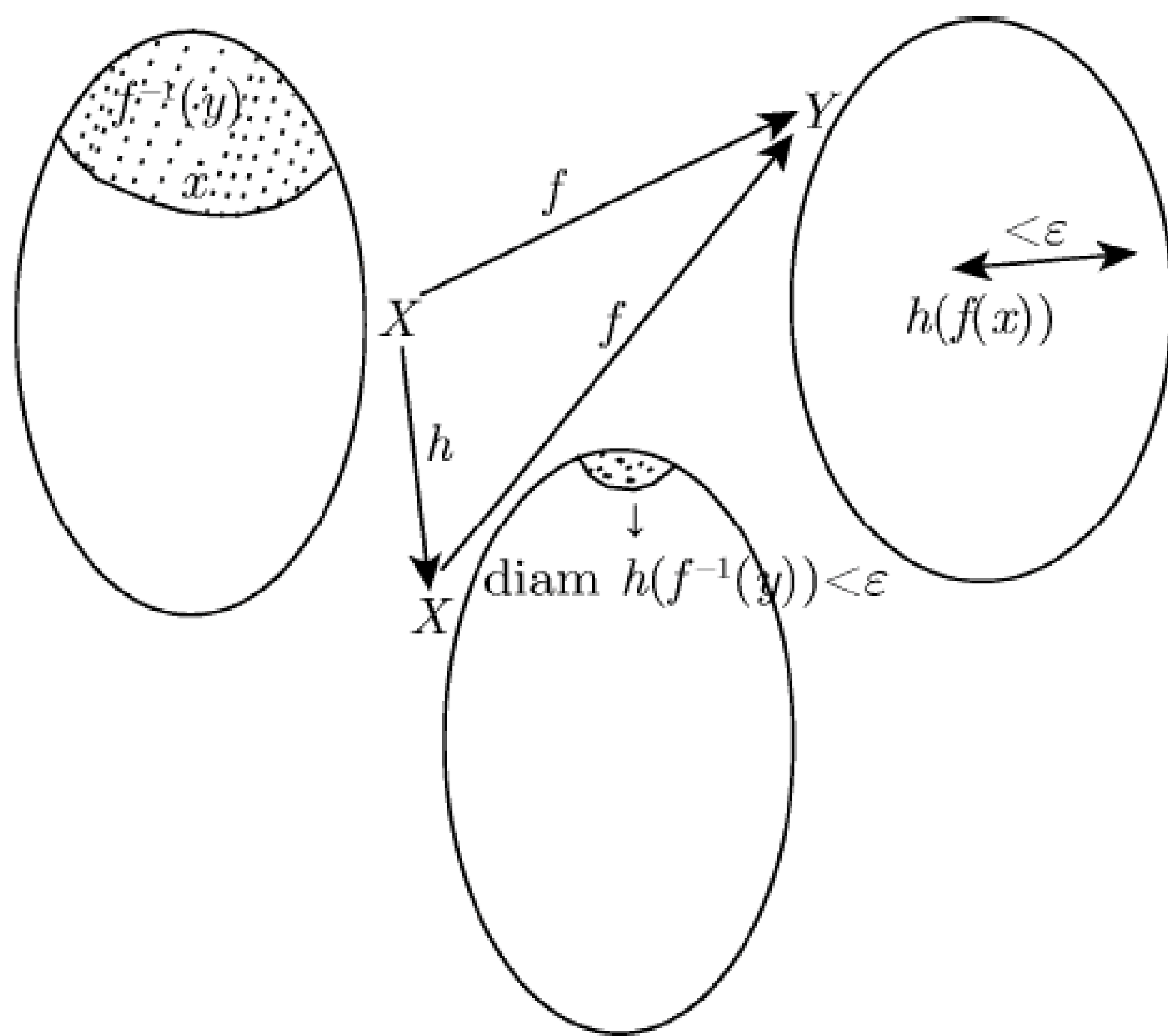


图 4-3 可收缩的定义

我们证明下面的定理.

定理 4.1.3 (Bing 收缩准则) 设 (X,ρ) 和 (Y,d) 是紧度量空间, $f:X\to Y$ 是连续满射, 则下列条件等价:

(1) f是近似同胚;

(2) f是可收缩的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $f: X\to Y$ 是近似同胚, $\varepsilon>0$. 选择 $g\in H(X,Y)$ 使得 $d(f,g)<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于 Y 是紧的, $g^{-1}:(Y,d)\to(X,\rho)$ 是一致连续的, 存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $y_1,y_2\in Y$,

$$d(y_1,y_2)<\delta \text{ 能推出 } \rho(g^{-1}(y_1),g^{-1}(y_2))<\varepsilon .$$

令 $\gamma=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\delta\right\}$. 再次由于 $f: X\to Y$ 是近似同胚, 存在 $k\in H(X,Y)$ 使得 $d(f,k)<\gamma$. 令 $h=g^{-1}\circ k$. 显然, $h\in H(X)$. 由于 $d(f,g)<\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $d(f,k)<\frac{\varepsilon}{2}$, 所以对任意的 $x\in X$,

$$\begin{aligned}
d(f(x),(f\circ h)(x)) &= d(f(x),f(g^{-1}(k(x))))\\
&\leqslant d(f(x),k(x))+d(k(x),f(g^{-1}(k(x))))\\
&= d(f(x),k(x))+d(g(g^{-1}(k(x))),f(g^{-1}(k(x))))\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此,

$$d(f,f\circ h)<\varepsilon.$$

又, 对任意的 $y\in Y$ 和 $x_1,x_2\in h(f^{-1}(y))=g^{-1}(k(f^{-1}(y)))$, 有 $g(x_1),g(x_2)\in k(f^{-1}(y))$. 所以, 存在 $x_1',x_2'\in X$ 使得

$$g(x_1)=k(x_1'),\ g(x_2)=k(x_2') \text{ 且 } f(x_1')=f(x_2')=y.$$

所以

$$\begin{aligned}
d(g(x_1),g(x_2)) &= d(k(x_1'),k(x_2'))\\
&\leqslant d(k(x_1'),f(x_1'))+d(f(x_1'),f(x_2'))+d(f(x_2'),k(x_2'))\\
&<\frac{\delta}{2}+0+\frac{\delta}{2}\\
&=\delta.
\end{aligned}$$

由 δ 的选择有

$$\rho(x_1,x_2)=\rho(g^{-1}(g(x_1)),g^{-1}(g(x_2)))<\varepsilon.$$

因此

$$\operatorname{diam} h(f^{-1}(y)) < \varepsilon$$

这样证明了 f 是可收缩的.

（2）$\Rightarrow$（1）. 设 $f:X \to Y$ 是可收缩的, $\varepsilon > 0$. 首先归纳定义 $H(X)$ 中的一个序列 $(h_0 = \mathrm{id}_X, h_1, \ldots)$ 使得每一个 $g_n = f \circ h_n : X \to Y$ 满足下面的条件:

(i) $g_n \in S_{1/n}(X,Y)$;

(ii) $d(g_{n+1}, g_n) < \dfrac{\varepsilon}{3^{n+1}}$;

(iii) $d(g_{n+1}, g_n) < \dfrac{\varepsilon}{3^n} \min\{d(g_i, S(X,Y) \setminus S_{1/i}(X,Y)) : 0 \leqslant i \leqslant n\}$.

注意到 $S_{+\infty}(X,Y) = S(X,Y), d(f, \varnothing) = +\infty$, 所以 $h_0 = \mathrm{id}_X$ 满足（i）且（iii）有定义. 现在, 假设 $h_n \in H(X)$ 已经定义且使得 g_n 满足（i）至（iii）, 我们将定义 $h_{n+1} \in H(X)$. 因为 $h_n^{-1} \in H(X)$ 是一致连续的, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $A \subset X$,

$$\operatorname{diam} A < \delta \text{ 能推出 } \operatorname{diam} h_n^{-1}(A) < \frac{1}{n+1}$$

因为 $f:X \to Y$ 是可收缩的, 存在 $\phi \in H(X)$ 使得

$$f \circ \phi^{-1} \in S_\delta(X,Y) \text{ 且 } d(f, f \circ \phi) < \gamma,$$

这里,

$$\gamma = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n} \min\{d(p_i, S(X,Y) \setminus S_{1/i}(X,Y)) : 0 \leqslant i \leqslant n\}\right\}.$$

令 $h_{n+1} = \phi^{-1} \circ h_n$, 那么, $h_{n+1} \in H(X)$ 且使得 g_{n+1} 满足（i）至（iii）. 事实上, 对任意的 $y \in Y$,

$$\operatorname{diam} g_{n+1}^{-1}(y) = \operatorname{diam} h_{n+1}^{-1}(f^{-1}(y)) = \operatorname{diam} h_n^{-1}(\phi(f^{-1}(y))) < \frac{1}{n+1}.$$

最后一个不等号成立是因为 $\operatorname{diam} \phi(f^{-1}(y)) < \delta$. 因此, （i）成立. 为证明（ii）（iii）成立, 我们仅仅需要注意到

$$d(g_{n+1}, g_n) = d(f \circ \phi^{-1} \circ h_n, f \circ h_n) = d(f, f \circ \phi) < \gamma.$$

归纳定义完成. 由（ii）知道 $h=\lim\limits_{n\to\infty}g_n$ 存在且 $d(f,h)<\varepsilon$, 由引理 4.1.1 知 $h\in S(X,Y)$, 由引理 4.1.3 和（iii）知 $h\in\prod\limits_{n=1}^{\infty}S_{1/n}(X,Y)$, 由引理 4.1.2（2）知 $h\in H(X,Y)$. 因此, 由 ε 的任意性知 f 是近似同胚. 证毕.

推论 4.1.1 如果两个紧度量空间之间存在可收缩的映射, 那么它们是同胚的.

定义 4.1.3 设 X 是拓扑空间, 令 $\triangle(X)=(X\times[0,1))\cup\{\infty\}$. 在 $\triangle(X)$ 上定义拓扑为:

$$\mathcal{T}=\{U\subset\triangle(X):U\cap(X\times[0,1))\text{ 是乘积空间 }X\times[0,1)\text{ 中的开集}$$

$$\text{且如果 }U\ni\infty,\text{ 则存在 }s\in[0,1)\text{ 使得 }X\times(s,1)\subset U\}.$$

我们称赋予这个拓扑的空间 $\triangle(X)$ 为 X 的**锥**. 我们用 $q:X\times\mathbf{I}\to\triangle(X)$ 记自然映射, 也即

$$h(x,t)=\begin{cases}(x,t), & \text{如果}t\in[0,1),\\ \infty, & \text{如果}t=1.\end{cases}$$

关于锥的一般性质, 见本节练习 4.1.F, 4.1.G. 这里, 作为定理 4.1.3 的直接应用, 我们证明下面的定理. 首先注意到, 如果 X 是紧的可度量化空间, 那么, $\triangle(X)$ 是把 $X\times I$ 中的紧子集 $X\times\{1\}$ 捏为一点商空间而且 $q:X\times I\to\triangle(X)$ 是商映射. 因此, $\triangle(X)$ 也是紧的可度量化空间.

定理 4.1.4 自然映射 $q:Q\times\mathbf{I}\to\triangle(Q)$ 是可收缩的, 因此 $\triangle(Q)\approx Q\times\mathbf{I}\approx Q$.

我们先给出下面的引理, 其在几何上是显然的, 看图 4-4. 请读者证明它.

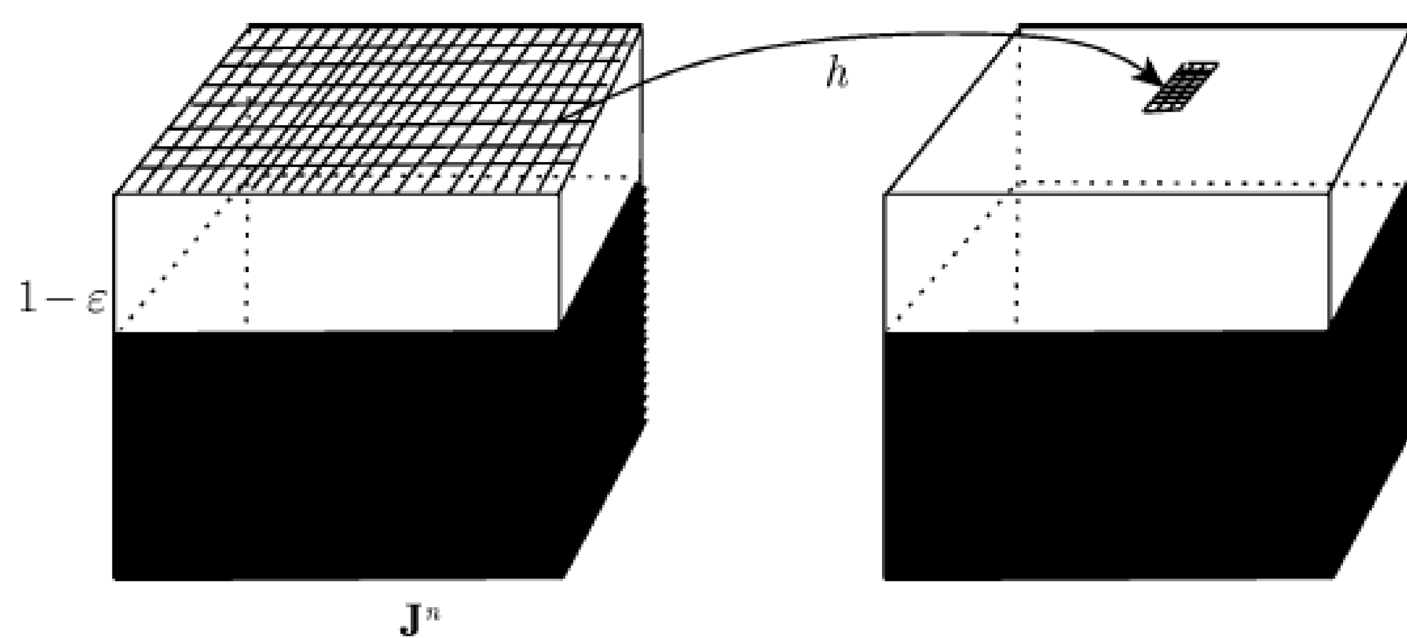


图 4-4 h 的定义

引理 4.1.7 对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $h\in H(\mathbf{J}^n\times\mathbf{I})$ 使得

$$h|\mathbf{J}^n\times[0,1-\varepsilon]=\mathrm{id}_{\mathbf{J}^n\times[0,1-\varepsilon]}\text{ 且 }\mathrm{diam}(h(\mathbf{J}^n\times\{1\}))<\varepsilon.$$



定理 4.1.4 的证明 对任意的 $\varepsilon \in (0,1)$，选择 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 因为 $q(Q \times \{1\}) = \{\infty\}$ 是单点集，由 **Wallace 定理（定理 4.3.5）**，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\operatorname{diam} q(Q \times [1-\delta, 1]) < \varepsilon.$$

这里，我们认为空间 $\triangle(Q)$ 上已经定义了相容度量 d. 令 $\gamma = \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. 由上面的引理，存在 $h_0 \in H(\mathbf{J}^n \times \mathbf{I})$ 使得

$$h_0 \big| \mathbf{J}^n \times [0, 1-\gamma] = \mathrm{id}_{\mathbf{J}^n \times [0,1-\gamma]} \text{ 且 } \operatorname{diam}(h_0(\mathbf{J}^n \times \{1\})) < \gamma.$$

现在定义 $h \in H(Q \times \mathbf{I})$ 为

$$h(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, t) = (y_1, \cdots, y_n, x_{n+1}, \cdots, s),$$

这里 $(y_1, \cdots, y_n, t) = h_0(x_1, \cdots, x_n, s)$. 那么，对任意 $y \in \triangle(Q)$，当 $y \neq \infty$ 时，$h(q^{-1}(y))$ 是单点集，因此，

$$\operatorname{diam}(h(q^{-1}(y))) = 0 < \varepsilon;$$

当 $y = \infty$ 时，$h(q^{-1}(y)) = h(Q \times \{1\}) = h_0(\mathbf{J}^n \times \{1\}) \times \prod_{m=n+1}^{\infty} \mathbf{J}_m$，因此，

$$\operatorname{diam}(h(q^{-1}(y))) = \operatorname{diam}(h_0(\mathbf{J}^n \times \{1\})) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以，

$$q \circ h^{-1} \in S_{\varepsilon}(Q \times \mathbf{I}, \triangle(Q)).$$

又对任意 $x \in Q \times \mathbf{I}$，当 $x \notin Q \times [1-\gamma, 1]$ 时，$h(x) = x$，所以，

$$(q \circ h)(x) = q(x);$$

当 $x \in Q \times [1-\gamma, 1]$ 时，$h(x) \in Q \times [1-\gamma, 1]$. 由此，

$$d(q(x), q(h(x))) \leqslant \operatorname{diam} q(Q \times [1-\gamma, 1]) \leqslant \operatorname{diam} q(Q \times [1-\delta, 1]) < \varepsilon.$$

所以，

$$d(q, q\circ h) < \varepsilon .$$

由 ε 的任意性知，$q : Q\times \mathbf{I} \to \triangle(Q)$ 是可收缩的. 由定理 4.1.3 的推论知 $\triangle(Q) \approx Q\times \mathbf{I} \approx Q$. 证毕.

注 4.1.3 对任意 $n \in ¥$, 令

$$U_n = q\left(Q\times\left(1-\frac{n}{n+1},1\right]\right).$$

那么容易验证 $\{U_n : n \in ¥\}$ 是 ∞ 在 $\triangle(Q)$ 中的邻域基, 而且

$$\mathrm{cl}\, U_n = q\left(Q\times\left[1-\frac{n}{n+1},1\right]\right),\ \mathrm{bd}\, U_n = q\left(Q\times\left\{\frac{n}{n+1}\right\}\right).$$

由此容易验证

$$\mathrm{cl}\, U_n \approx \mathrm{bd}\, U_n \approx Q .$$

因为 $Q \approx \triangle(Q)$ 是齐次的, 所以 Q 中每一点都有邻域基 $\{U_n\}$, 使得对任意的 n, $\mathrm{cl}\, U_n \approx \mathrm{bd}\, U_n \approx Q$ 是绝对收缩核. 所以, 代数拓扑学中的同调论方法对于研究 Q-流形的性质是无效的. 这里, 一个度量空间如果存在一个由同胚于 Q 中的开集组成的开覆盖, 我们就称这个空间是 ***Q*-流形**.

4.1.3 方法三: 同痕

在注 4.1.3 中说过同调论很少在研究 Q-流形中被使用, 但是, 代数拓扑学中的另一个重要工具—— 同伦论却是研究 Q-流形的重要手段. 让我们先给出这个定义.

定义 4.1.4 设 X, Y 是空间, K 是紧空间, 称连续映射 $H : X\times K \to Y$ 为由 X 到 Y 的 ***K*-同伦**. 对 $t \in K$, 由下式定义的映射 $H_t : X \to Y$ 被称为 H 的 t 水平:

$$H_t(x) = H(x, t).$$

如果对任意的 $t\in K$, $H_t: X\to Y$ 是同胚, 则称 $H: X\times K\to Y$ 为由 X 到 Y 的 **K-同痕**. 如果 $K=\mathbf{I}$, 我们可以省略上面定义和记号中的 K. 设 $f,g\in C(X,Y)$, 如果存在同伦（同痕）$H: X\times\mathbf{I}\to Y$ 使得 $H_0=f, H_1=g$, 则称 f 和 g 是**同伦的（同痕的）**, H 被称为连接 f 和 g 的**同伦（同痕）**.

例 4.1.1 设 X 是一个空间, Y 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子集, $f,g\in C(X,Y)$. 如果 Y 是凸集, 那么 f 和 g 是同伦的.

事实上, 我们可以定义 $H: X\times\mathbf{I}\to Y$ 为

$$H(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x),$$

称这个同伦为连接 f 和 g 的线性同伦. 显然, 我们可以把 Y 是凸集的要求降低到仅仅要求 Y 满足上面 H 有定义即可, 这个推广有时是有用的.

注 4.1.4 如果 $H: X\times K\to Y$ 为由 X 到 Y 的 K-同痕, 那么可以定义映射 $G: Y\times K\to X$ 为

$$G(y,t)=(H_t)^{-1}(y).$$

但是, 这样定义的 G 未必是连续的. 看下面的例 4.1.2. 如果上面定义的 $G: Y\times K\to X$ 是连续的, 则称 $H: X\times K\to Y$ 是**可逆的同痕**. 显然, $H: X\times K\to Y$ 是可逆的同痕当且仅当 $(x,t)\mapsto (H(x,t),t)$ 建立了 $X\times K$ 到 $Y\times K$ 的同胚. 因此, 当 X 是紧空间时, 推论 4.1.1 说明所有由 X 到 Y 的同痕都是可逆的. 下面的定理 4.1.5 显示, 只要 X 是局部紧空间（于是 Y 也是局部紧空间）, 当 $K=\mathbf{I}$ 时, 相应的结论也成立.

例 4.1.2 定义 $\mathbb{R}^2$ 的子空间 X 为

$$X=\mathbf{I}\times\{0\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I}.$$

我们将定义非可逆的同痕 $H: X\times\mathbf{I}\to X$. 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 令 $p_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{3n}\right)$, $q_n=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{3}\right)$. 作折线 $l_n:\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I}\to\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I}$ 使得

$$l_n\left(\frac{1}{n},0\right)=\left(\frac{1}{n},0\right),\ l_n\left(\frac{1}{n},q_n\right)=\left(\frac{1}{n},p_n\right),\ l_n\left(\frac{1}{n},1\right)=\left(\frac{1}{n},1\right).$$

如图 4-5 所示.

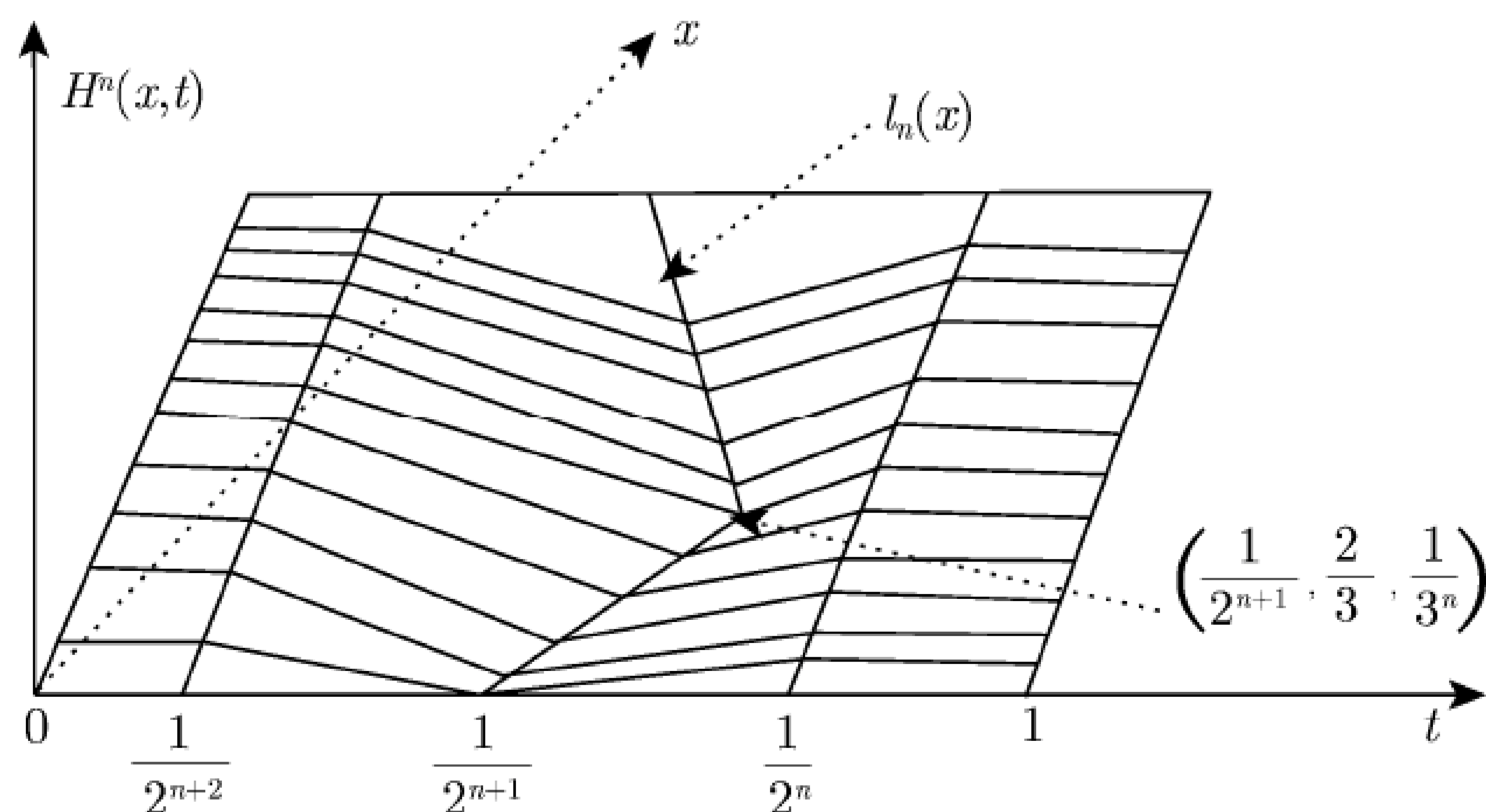


图 4-5 H^n 的定义

定义同伦

$$H^n:\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I}\times\mathbf{I}\to\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I},$$

使得其在 $\left[0,\frac{1}{2^{n+2}}\right]\cup\left[\frac{1}{2^n},1\right]$ 的每一个水平上是恒等映射, 在 $\left[\frac{1}{2^{n+2}},\frac{1}{2^{n+1}}\right]$ 上用"线性"同伦连接恒等映射和 l_n, 在 $\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right]$ 上用"线性"同伦连接 l_n 和恒等映射.

容易验证, $H^n:\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I}\times\mathbf{I}\to\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I}$ 是同痕,而且对任意的 $(x,t)\in\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I}\right)$, $\times\mathbf{I}$ 有

$$\left\|H^n(x,t)\right\|\leqslant\|x\|. \tag{4-1-3}$$

利用这些映射定义 $H:X\times\mathbf{I}\to X$ 为:

$$H(x,t)=\begin{cases}H^n(x,t), & \text{若}x\in\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I},\\ x, & \text{若}x\in\mathbf{I}\times\{0\}.\end{cases}$$

注意到对任意的 n 和 $t\in\mathbf{I}$, 我们有 $H^n\left(\frac{1}{n},0,t\right)=\left(\frac{1}{n},0\right)$, 因此, 上面的公式确实定义了一个映射. 进一步, 我们验证这个映射 H 有下面的性质, 这些性质说明 H 是同痕但不是可逆的.

（1） H 是连续的. 由公式（4-1-3）知, H 在 $(0,0,t)$ 连续, 在其他点连续是显然的.

（2）对任意的 $t\in\mathbf{I}, H_t:X\to X$ 是同胚. 显然每一个 H_t 是 X 到自身的一一对应. 当 $t=0$ 时, $H_0=\mathrm{id}_X$ 是同胚; 当 $t\in(0,1]$ 时, 选择 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\dfrac{1}{2^{n_0}}<t$. 那么

$$H_t\Bigg|\left(\mathbf{I}\times\{0\}\cup\bigcup_{n=n_0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I}\right)=\mathrm{id}.$$

又, 由于 $\bigcup_{n=1}^{n_0}\left\{\dfrac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I}$ 是紧的, 所以

$$H_t\Bigg|\left(\bigcup_{n=1}^{n_0}\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\mathbf{I}\right)$$

也是同胚, 所以 H_t 是同胚.

（3）映射 $(x,t)\mapsto(H(x,t),t)$ 不是同胚. 我们仅仅需要注意到序列

$$\left(\left(q_n,\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)=\left(\left(\frac{1}{n},\frac{2}{3},\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

在 $X\times\mathbf{I}$ 中没有极限, 但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(H\left(q_n,\frac{1}{2^{n+1}}\right),\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(p_n,\frac{1}{2^{n+1}}\right)=(0,0,0)$$

在 $X\times\mathbf{I}$ 中有极限.

定理 4.1.5 如果 X,Y 是局部紧空间, $H:X\times\mathbf{I}\to Y$ 是同痕, 那么, H 是可逆的.

证明 定义 $\overline{H}:X\times\mathbf{I}\to Y\times\mathbf{I}$ 为

$$\overline{H}(x,t)=(H_t(x),t).$$

如前所述, 为了证明 $H:X\times\mathbf{I}\to Y$ 是同痕, 需要证明 $\overline{H}:X\times\mathbf{I}\to Y\times\mathbf{I}$ 是同胚. 为此, 仅仅需要验证 $\overline{H}:X\times\mathbf{I}\to Y\times\mathbf{I}$ 是开映射.

设 G 是 $X\times\mathbf{I}$ 中的开集, $(x,t)\in G$. 现在证明存在 $Y\times\mathbf{I}$ 中的开集 L 使得

$$\overline{H}(x,t)=(H_t(x),t)\in L\subset\overline{H}(G).\tag{4-1-4}$$

因为 X 是局部紧的, 我们能选择 $U\in\mathcal{N}(x)$ 和区间 S 使得

$$(x,t)\in U\times S\subset G \text{ 且 } \mathrm{cl}\,U \text{ 是紧集}.$$

因为 $H_t: X\to Y$ 是同胚，所以存在 $V\in\mathcal{N}(H_t(x))$ 使得

$$H_t^{-1}(\mathrm{cl}\,V)\subset U.$$

则对任意的 $z\in \mathrm{bd}\,U=\mathrm{cl}\,U\setminus U$，有

$$H_t(z)\in Y\setminus \mathrm{cl}\,V.$$

因为 $H: X\times\mathbf{I}\to Y$ 是连续的，$\mathrm{bd}\,U$ 是紧的，所以存在 $W\in\mathcal{N}(x)$ 和 t 的一个连通邻域 J 使得

$$J\subset S,\ W\subset U,\ H(W\times J)\subset V \text{ 且 } H(\mathrm{bd}\,U\times J)\subset Y\setminus \mathrm{cl}\,V. \tag{4-1-5}$$

由最后一个公式知，对任意的 $s\in J$，

$$H_s^{-1}(\mathrm{cl}\,V)\subset X\setminus \mathrm{bd}\,U. \tag{4-1-6}$$

下面证明 $L=H_t(W)\times J$ 满足我们的要求.

首先，因为 H_t 是同胚，所以 L 是开集.

其次，显然 $\overline{H}(x,t)=(H_t(x),t)\in L$.

最后，证明公式（4-1-4）的后半部分成立. 设 $z\in W, s\in J$. 因为 $H(\{z\}\times J)$ 是连通的，所以 $H_s^{-1}(H(\{z\}\times J))$ 也是连通的. 进一步，应用式（4-1-5）和式（4-1-6）知

$$H_s^{-1}(H(\{z\}\times J))\subset H_s^{-1}(\mathrm{cl}\,V)\subset X\setminus \mathrm{bd}\,U=U\cup(X\setminus \mathrm{cl}\,U)$$

且

$$z\in H_s^{-1}(H(\{z\}\times J))\cap U.$$

由于 U 和 $X\setminus \mathrm{cl}\,U$ 是隔离的，所以

$$H_s^{-1}(H(\{z\}\times J))\subset U.$$

特别地，

$$H_s^{-1}(H_t(z))\subset U\text{，即 } H_t(z)\in H_s(U).$$

由 $z\in W, s\in J$ 的任意性知

$$L=H_t(W)\times J\subset \bigcap_{s\in J} H_s(U)\times J\subset \bigcup_{s\in J} H_s(U)\times\{s\}=\overline{H}(U\times J)\subset \overline{H}(G).$$

我们完成了定理的证明.

下面再给出 K-同痕的乘积性质, 证明留给读者.

定理 4.1.6 设对任意的 $n\in¥$, $H^n: X_n\times K_n\to Y_n$ 是 K_n-同痕, 那么下面定义的

$$H:\prod_{n=1}^{\infty}X_n\times\prod_{n=1}^{\infty}K_n\to\prod_{n=1}^{\infty}Y_n$$

是 $\prod_{n=1}^{\infty}K_n$ -同痕,

$$H((x_n),(k_n))(n)=H^n(x_n,k_n).$$

下面的定理显示了如何由 K-同痕得到同胚.

定理 4.1.7 设 X,Y 是空间, K 是紧空间, $H:X\times K\to X$ 为由 X 到 X 的 K-同伦, $\alpha: Y\to K$ 连续. 那么下面定义的映射 $f:X\times Y\to X\times Y$ 连续:

$$f(x,y)=(H(x,\alpha(y)),y).$$

此外, 如果假定 X,Y,K 满足下面条件之一且 $H:X\times K\to X$ 为由 X 到 X 的同痕时, 那么 $f:X\times Y\to X\times Y$ 是同胚:

（1） X,Y 是局部紧的且 $K=\mathbf{I}$;

（2） X,Y 是紧的.

证明 f 的连续性是显然的.

现在假定 X,Y,K 满足 (1) 或者 (2) , 证明 $H:X\times K\to X$ 为由 X 到 X 的 K-同痕.

对任意的 $(x,y)\in X\times Y$, 因为 $H_{\alpha(y)}:X\to X$ 是同胚, 存在 $\alpha\in X$ 使得

$$H_{\alpha(y)}(a)=x, \text{ 即 } H(a,\alpha(y))=x.$$

因此, $f(a,y)=(x,y)$. 由此说明 f 是满射.

又, 对任意的 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$. 如果 $y_1\neq y_2$, 那么显然 $f(x_1,y_1)\neq f(x_2,y_2)$; 如果 $y_1=y_2=y$, 那么 $x_1\neq x_2$, 于是由 $H_{\alpha(y)}$ 是同胚可得

$$H(x_1,\alpha(y))\neq H(x_2,\alpha(y)).$$

因此, $f(x_1,y_1)\neq f(x_2,y_2)$. 由此说明 f 是单射.

最后，我们证明 $f^{-1}: X\times Y \to X\times Y$ 是连续的. 在我们的假定下，由定理 4.1.7 知 $G: X\times K \to X$ 是连续的，这里，对任意的 $(x,k)\in X\times K$，

$$G(x,k)=(H_k)^{-1}(x).$$

容易验证，

$$f^{-1}(x,y)=(G(x,\alpha(y)),y).$$

因此，f^{-1} 是连续的. 证毕.

在本节最后，我们给出上面定理 4.1.7 的一个应用. 这个应用虽然很简单，但它是后面复杂应用的一个雏形.

定理 4.1.8 令 E,F 是 $(-1,1)$ 的两个紧集，$f: E\to F$ 是同胚，那么存在同胚 $g:\mathbf{J}^2\to\mathbf{J}^2$ 使得对任意的 $x\in E$，有

$$g(x,0)=(f(x),0) \text{ 且 } g\big|\partial\mathbf{J}^2=\mathrm{id}_{\partial\mathbf{J}^2}.$$

证明 令

$$G(f)=\{(x,f(x)): x\in E\}$$

为 f 的图像. 选择 $a\in(0,1)$ 使得 $E,F\subset[-a,a]=K$. 定义 $H:\mathbf{J}\times K\to\mathbf{J}$ 为：对任意的 $(x,t)\in\mathbf{J}\in K$，

$$H(x,t)=\begin{cases} t+(t+1)x, & \text{若 } x\in[-1,0], \\ t+(1-t)x, & \text{若 } x\in\mathbf{I}, \end{cases}$$

即对任意的 $t\in K, H_t$ 是连接点 $(-1,-1),(0,t),(1,1)$ 的折线. 因此，H 是 $\mathbf{J}$ 到自身的 K-同痕. 由 Tietze 扩张定理（定理 2.7.3），存在连续映射 $\alpha:\mathbf{J}\to K$ 使得 $\alpha\big|F=f^{-1}, \alpha(\pm1)=0$. 则由定理 4.1.7 知下面定义的 $g_1:\mathbf{J}^2\to\mathbf{J}^2$ 是同胚：

$$g_1(x,y)=(H(x,\alpha(y)),y).$$

那么对任意的 $y\in F$，我们有

$$g_1(0,y)=(H(0,\alpha(y)),y)=(\alpha(y),y)=(f^{-1}(y),y)\in G(f) \tag{4-1-7}$$

且

$$g_1\big|\partial\mathbf{J}^2=\mathrm{id}_{\partial\mathbf{J}^2}. \tag{4-1-8}$$

同理，存在同胚 $g_2:\mathbf{J}^2\to\mathbf{J}^2$ 使得对任意的 $x\in E$，

$$g_2(x,0)=(x,f(x))\in G(f) \tag{4-1-9}$$

且

$$g_2|\partial\mathbf{J}^2=\mathrm{id}_{\partial\mathbf{J}^2}.\tag{4-1-10}$$

最后, 显然存在同胚（见练习 4.1. B） $g_3:\mathbf{J}^2\to\mathbf{J}^2$ 使得对任意的 $y\in[-a,a]$,

$$g_3(0,y)=(y,0) \text{ 且 } g_3|\partial\mathbf{J}^2=\mathrm{id}_{\partial\mathbf{J}^2}.\tag{4-1-11}$$

那么 $g=g_3\circ g_1^{-1}\circ g_2:\mathbf{J}^2\to\mathbf{J}^2$ 满足我们的要求. 事实上, 对任意的 $x\in E$, 因为 $f(x)\in[-a,a]$, 所以由式（4-1-7）,（4-1-9）和（4-1-11）知

$$\begin{aligned}g(x,0)&=g_3(g_1^{-1}(g_2(x,0)))=g_3(g_1^{-1}(x,f(x)))\\&=g_3(g_1^{-1}(f^{-1}(f(x)),f(x)))=g_3(0,f(x))=(f(x),0).\end{aligned}$$

由公式（4-1-8）,（4-1-10）和（4-1-11）知道

$$g|\partial\mathbf{J}^2=\mathrm{id}_{\partial\mathbf{J}^2}$$

证毕.

注 4.1.5 在上面定理中, 如果我们认为 $(-1,1)=(-1,1)\times\{0\}\subset\mathbf{J}^2$, 那么上面的定理说明 $(-1,1)$ 中任意两个紧集之间的任意同胚都存在到 $\mathbf{J}^2$ 的同胚扩张且这个同胚可以保持在 $\partial\mathbf{J}^2$ 上不动. 大家可以给出非常简单的例子说明我们不可以用 $\mathbf{J}$ 代替 $\mathbf{J}^2$. 在本章第 3 节和第 4 节, 我们将探讨 Hilbert 方体 Q 中哪些紧集之间的同胚也有类似的性质.

练 习 4.1

4.1.A. 设 (X,ρ) 和 (Y,d) 是紧度量空间, $f:X\to Y$ 是近似同胚, $h\in H(X),k\in H(Y)$, 证明 $f\circ h:X\to Y$ 和 $k\circ f:X\to Y$ 也是近似同胚. 由上面结论可以推出近似同胚的概念不依赖空间 X,Y 上度量的选择.

4.1.B. （1）设

$$\mathbf{B}^2(2)=\{x\in\mathbb{R}^2:\|x\|\leqslant 2\},\quad \mathbb{S}^1(2)=\{x\in\mathbb{R}^2:\|x\|=2\}.$$



证明存在同胚 $h:\mathbf{B}^2(2)\to\mathbf{B}^2(2)$ 使得 $h|S^1(2)=\mathrm{id}_{S^1(2)}$ 且对任意的 $(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbf{B}^2$，有

$$h(r\cos\theta, r\sin\theta)=\left(r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

（2）设 $a\in(0,1)$，证明存在同胚 $h:\mathbf{J}^2\to\mathbf{J}^2$ 使得对任意的 $y\in[-a,a]$，

$$h(0,y)=(y,0) \text{ 且 } h|\partial\mathbf{J}^2=\mathrm{id}_{\partial\mathbf{J}^2}.$$

4.1.C. 一个**群**是指一个非空集合 G 和 G 上的一个二元运算 $\cdot: G\times G\to G$ 满足下面性质:

（1）结合律成立: 对任意的 $a,b,c\in G$，有 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;

（2）存在单位元: 存在 $e\in G$，使得对任意的 $a\in G$，有 $a\cdot e=e\cdot a=a$;

（3）存在逆元: 对任意的 $a\in G$，存在 a^{-1} 使得 $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$.

我们用 $(G,\cdot)$ 或者 G 记这个群. 容易证明，单位元 e 是唯一的，每一个元 $a\in G$ 也仅有一个逆元 a^{-1}. 因此，${}^{-1}: G\to G$ 是一个映射. 一个**拓扑群**是指一个群 $(G,\cdot)$ 和一个 T_3 的拓扑空间 $(G,\mathcal{T})$ 使得映射 $\cdot: G\in G\to G$ 和映射 ${}^{-1}: G\to G$ 是连续的. 证明：

（1）每一个拓扑群都是一个齐次的拓扑空间.

（2）不存在二元运算 $\cdot: Q\times Q\to Q$ 使得 $(Q,\cdot)$ 成为拓扑群.

4.1.D. 证明存在 Q 的基 $\mathcal{B}$ 使得对任意的 $B\in\mathcal{B}$ 和任意的 $x,y\in B$，存在 $h\in H(Q)$ 满足

$$h(x)=y \text{ 且 } h|Q\setminus B=\mathrm{id}|Q\setminus B.$$

4.1.E. 证明 Q 是 $n-$ 齐次的，即对 Q 的任意两个 n 个点的集合 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，存在 $h\in H(Q)$ 使得

$$h(x_1)=y_1, h(x_2)=y_2,\cdots,h(x_n)=y_n.$$

4.1.F. 证明 X 是（可分）可度量化的充分必要条件是它的锥 $\triangle(X)$ 是（可分）可度量化的.

4.1.G. 设 X 是 Hausdorff 空间. 证明在定义 4.1.3 中定义的映射 $q: X\times\mathbf{I}\to\triangle(X)$ 是连续的. 进一步，证明其为商映射当且仅当 X 是可数紧的.

这里, Hausdorff 空间 X 称为**可数紧的**, 如果对 X 的任意可数开覆盖都存在有限子覆盖, **由定理 4.1.3**, 度量空间是紧的当且仅当其是可数紧的, 但对于 Hausdorff 空间而言, 二者不等价.

4.2 Z-集

Z-集是无限维拓扑学和几何拓扑学中的重要概念, 本节将给出其定义及基本性质, 特别是 Hilbert 方体 Q 的 Z-集的存在性及基本性质. Hilbert 方体 Q 的 Z-集的深刻性质将在随后两节给出.

定义 4.2.1 设 X,Y 是拓扑空间, $\mathcal{U}$ 是 X 的开覆盖, $f,g\in C(Y,X)$. 如果对任意的 $y\in Y$, 存在 $U\in\mathcal{U}$ 使得 $f(y),g(y)\in U$, 则称 f 和 g 是 $\mathcal{U}$-**接近的**. 设 (X,d) 是度量空间, $\varepsilon\in C(X,(0,1))$, 如果对任意的 $y\in Y$,

$$d(f(y),g(y))<\varepsilon(f(y)),$$

则称 f 和 g 是 ε-**接近的.**

下面引入我们的重要定义.

定义 4.2.2 设 A 是拓扑空间 X 中的闭集, 如果对任意的连续映射 $f:Q\to X$ 和 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$ 都存在连续映射 $g:Q\to X$ 使得 f 和 g 是 $\mathcal{U}$-接近的且 $g(Q)\cap A=\varnothing$, 则称 A 是 X 的 **Z-集**. 可以表示为可数多个 X 的 Z-集的并的子集成为 X 的 Z_σ-**集**. 我们用 $\mathcal{Z}(X)$ 和 $\mathcal{Z}_\sigma(X)$ 分别表示空间 X 的所有 Z-集之族和所有 Z_σ-集之族.

我们有下面的结果.

定理 4.2.1 设 A 是度量空间 (X,d) 中的闭集, 则下列条件等价:

(1) $A\in\mathcal{Z}(X)$;

(2) 对任意的常数 $\varepsilon>0$, 对任意的 $f\in C(Q,X)$, 存在 $g\in C(Q,X)$ 使得 $d(f,g)<\varepsilon$ 且 $g(Q)\cap A=\varnothing$.

证明 (1)⇒(2). 对任意的 $\varepsilon>0$, 考虑 X 的开覆盖 $\mathcal{U}=\left\{B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right):x\in X\right\}$. 对任意的 $f\in C(Q,X)$, 由 (1) 存在 $g\in C(Q,X)$ 使得 f 和 g 是 $\mathcal{U}$-接近的且

$g(Q)\cap A=\varnothing$. 那么,

$$d(f,g)<\varepsilon \text{ 且 } g(Q)\cap A=\varnothing.$$

所以（2）成立.

$(2)\Rightarrow(1)$. 对任意的连续映射 $f:Q\to X$ 和 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$, $f(Q)$ 是 X 的紧集, 因此由 Lebesgue 数引理, 存在 $\varepsilon>0$ 使得对任意的 $B\subset X$, 如果 $\operatorname{diam} B<\varepsilon$ 且 $B\cap f(Q)\neq\varnothing$, 则存在 $U\in\mathcal{U}$ 使得 $B\subset U$. 对这个 $\varepsilon>0$ 使用（2）, 存在 $g\in C(Q,X)$ 使得

$$g(Q)\cap A=\varnothing \text{ 且 } d(f,g)<\varepsilon.$$

那么对任意的 $q\in Q$,

$$\operatorname{diam}\{f(q),g(q)\}<\varepsilon \text{ 且 } \{f(q),g(q)\}\cap f(Q)\neq\varnothing.$$

因此存在 $U\in\mathcal{U}$ 使得 $\{f(q),g(q)\}\subset U$, 即 f,g 是 $\mathcal{U}$-接近的. 这样我们证明了 $A\in\mathcal{Z}(X)$. 证毕.

下面给出 Z-集和 Z_σ-集的基本性质.

定理 4.2.2 令 X 是拓扑空间, 那么:

（1）如果 $A\in\mathcal{Z}(X)$ 且 B 是 A 的闭子集, 则 $B\in\mathcal{Z}(X)$;

（2）如果 $A\in\mathcal{Z}(X)$, 则 $\operatorname{int} A=\varnothing$;

（3）如果 (X,d) 是完备的, $A\in\mathcal{Z}_\sigma(X)$, 那么对任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $f\in C(Q,X)$, 存在 $g\in C(Q,X)$ 使得 $d(f,g)<\varepsilon$ 且 $g(Q)\cap A=\varnothing$;

（4）如果 (X,d) 是完备的, $A\in\mathcal{Z}_\sigma(X)$ 且 A 是闭集, 则 $A\in\mathcal{Z}(X)$;

（5）如果 $A\in\mathcal{Z}(X)$, Y 是拓扑空间, 则 $A\times Y\in\mathcal{Z}(X\times Y)$;

（6）如果 $A\in\mathcal{Z}(X)$, $h\in H(X)$, 则 $h(A)\in\mathcal{Z}(X)$.

证明（1）,（2）,（5）,（6）是显然的,（4）是（3）的推论, 因此, 我们仅仅需要证明（3）. 为此, 设 (A_n) 是完备度量空间 (X,d) 的 Z-集列, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. 对任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $f\in C(Q,X)$, 显然, 我们可以归纳地定义 $g_n\in C(Q,X\setminus A_n,d)$, 使得对任意的 n,

(i) $d(f,g_1)<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $d(g_n,g_{n+1})<\dfrac{\varepsilon}{2\cdot 3^n}$;

(ii) $d(g_n,g_{n+1})<\dfrac{1}{3^n}\min\{d(g_i(Q),A_i)\}$.

那么由（i）和(X,d)是完备的知$g=\lim_{n\to\infty}g_n$存在、连续且$d(f,g)<\varepsilon$. 又, 对任意的$q\in Q$, 由（ii）知

$$d(g_{n+1}(q),g_n(q))<\frac{1}{3^n}\min\{d(g_i(q),A_i)\},$$

因此, 由引理 4.1.1 有

$$g(q)=\lim_{n\to\infty}g_n(q)\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A.$$

所以g满足（3）的要求. 证毕.

为了主要目的—— 证明 Anderson 定理, 我们主要讨论 Hilbert 方体Q中的Z-集. 首先证明Q中存在很多的Z-集.

定理 4.2.3 设A是Q的闭集, 那么:

（1）$A\in\mathcal{Z}(Q)$当且仅当对任意的$\varepsilon>0$, 存在$f\in C(Q,Q\setminus A)$使得$d(f,\mathrm{id}_Q)<\varepsilon$;

（2）如果存在无限多个n使得$p_n(A)\neq[-1,1]$, 那么$A\in\mathcal{Z}(Q)$;

（3）如果存在n使得$p_n(A)\subset\{-1,1\}$, 那么$A\in\mathcal{Z}(Q)$.

证明 （1）“$\Rightarrow$”由Z-集的定义立即得到.

为证明“$\Leftarrow$”, 假设$g\in C(Q,Q)$, $\varepsilon>0$. 那么存在$f\in C(Q,Q\setminus A)$使得$d(f,\mathrm{id}_Q)<\varepsilon$. 令$h=f\circ g$, 则

$$d(h,g)=d(f\circ g,g)\leqslant d(f,\mathrm{id}_X)<\varepsilon \text{ 且 } h(Q)\subset f(Q)\subset Q\setminus A.$$

所以, $A\in\mathcal{Z}(Q)$.

（2）对任意的$\varepsilon>0$, 选择$N\in¥$使得$\frac{2}{2^N}<\varepsilon$且$p_N(A)\neq[-1,1]$. 因此, 我们可以选择$x_N^0\in[-1,1]\setminus p_N(A)$. 定义$f\in C(Q,Q)$为:

$$f(x)(n)=\begin{cases}x_n, & 若 n\neq N,\\ x_N^0, & 若 n=N,\end{cases}$$

那么,

$$d(\mathrm{id}_Q,f)<\varepsilon \text{ 且 } f(Q)\subset Q\setminus A.$$

由（1）知 $A \in \mathcal{Z}(Q)$.

（3）可以证明 $\{-1,1\} \in \mathcal{Z}([-1,1])$（看练习 4.2.A）. 又由假设 $A \subset \{-1,1\} \times \prod_{m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}} \mathbf{J}_m$. 所以由定理 4.2.2（5）和（1）, 我们有 $A \in \mathcal{Z}(Q)$. 证毕.

推论 4.2.1（1）$B(Q) \in \mathcal{Z}_\sigma(Q)$;

（2）如果 $K \subset s$ 是紧集, 那么 $K \in \mathcal{Z}(Q)$.

练 习 4.2

4.2.A. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 证明 $A \in \mathcal{Z}(B^{n+1})$ 的充分必要条件为 A 是闭集且 $A \subset \mathbb{S}^n$.

4.2.B. 给出紧度量空间 X 及其闭子空间 Y 使得

$$\mathcal{Z}(Y) \not\subset \mathcal{Z}(X) \text{ 且 } \mathcal{Z}(X) \cap \mathrm{cl}\,d(Y) \not\subset \mathcal{Z}(Y).$$

4.2.C. 设 A 是 s 的紧集, 证明 $A \in \mathcal{Z}(s)$. 举例说明 s 中存在非紧的 Z- 集.

4.3 Z-集的同胚扩张定理 I

本节将证明对 s 中任意两个紧集 E, F（因此也是 Q 中的 Z-集）之间的同胚 $h: E \to F$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 如果 $d(h, \mathrm{id}_Q) < \varepsilon$, 那么存在 $\bar{h} \in H(Q)$ 使得

$$d(\bar{h}, \mathrm{id}_Q) < \varepsilon \text{ 且 } \bar{h}|E = h.$$

一般地, 称满足条件 $d(\bar{h}, \mathrm{id}_Q) < \varepsilon$ 的同胚为“小”同胚. 如果 $h \in H(Q)$ 满足条件

$$h(B(Q)) = B(Q) \text{ 或者等价的 } h(s) = s,$$

则称 h 是**边界保持的同胚**.

为了完成主要结论的证明, 我们需要一系列引理, 而下面的引理是一个重要的基础.

引理 4.3.1 对于 s 中每一个非空的紧集 K，存在边界保持的同胚 $h\in H(Q)$ 使得

$$p_1(h(K))=\{0\}.$$

证明 不失一般性，可以假定

$$K=\prod_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n],$$

这里 $-1<a_n<b_n<1$. 对任意的 $n>1$，我们证明存在 $h_n\in H(\mathbf{J}_1\times\mathbf{J}_n)$ 使得

(i) h_n 不改变任何点的 $\mathbf{J}_1$ 坐标;

(ii) $h_n([a_1,b_1]\times[a_n,b_n])$ 中每两个有相同 $\mathbf{J}_n$ 坐标的点的 $\mathbf{J}_1$ 坐标的差小于 $\frac{1}{n}$;

(iii) $h_n|\partial(\mathbf{J}_1\times\mathbf{J}_n)=\mathrm{id}_{\partial(\mathbf{J}_1\times\mathbf{J}_n)}$.

图 4-6 形象地说明了 h_n 的存在性.

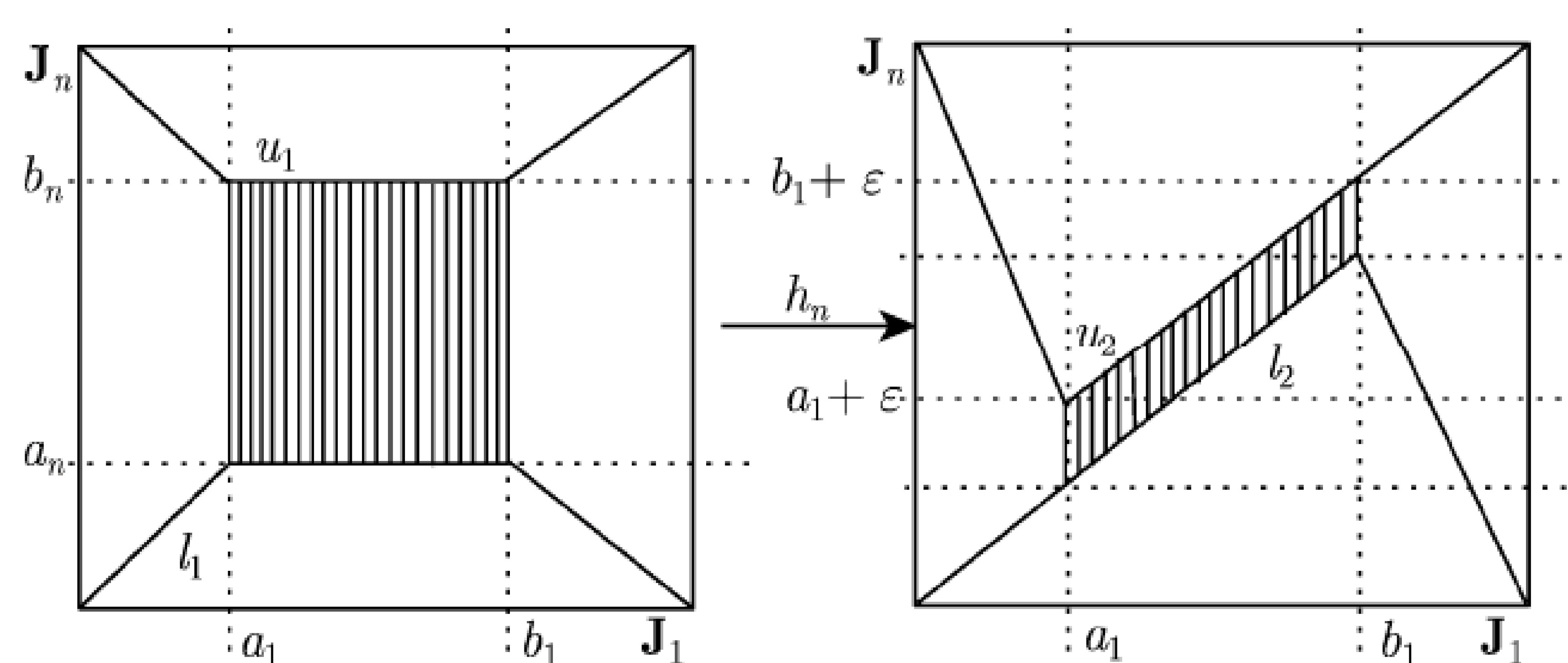


图 4-6 h_n 的定义

严格地说，选择 $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 使得对任意的 $x\in[a_1,b_1]$，有 $\varepsilon+x\in(-1,1)$. 定义四个折线函数分别经过以下几个点:

$u_1:[-1,1]\to[-1,1]$ 经过 $(-1,1),(a_1,b_n),(b_1,b_n),(1,1)$;

$l_1:[-1,1]\to[-1,1]$ 经过 $(-1,-1),(a_1,a_n),(b_1,a_n),(1,-1)$;

$u_2:[-1,1]\to[-1,1]$ 经过 $(-1,1),(a_1,a_1+\varepsilon),(b_1,b_1+\varepsilon),(1,1)$;

$l_2:[-1,1]\to[-1,1]$ 经过 $(-1,-1),(a_1,a_1),(b_1,b_1),(1,-1)$.

显然, 对任意的 $x \in \mathbf{J}_1, l_1(x) < u_1(x), l_2(x) < u_2(x)$, 因此可以定义折线 $m_x : \mathbf{J}_n \to \mathbf{J}_n$ 经过 $(-1,-1), (l_1(x), l_2(x)), (u_1(x), u_2(x)), (1,1)$. 注意到 $m_{-1} = m_1 = \mathrm{id}_{\mathbf{J}_n}$, 那么下面定义的 $h_n : \mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_n \to \mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_n$ 满足我们的要求（i）至（iii）:

$$h_n(x, y) = (x, m_x(y)).$$

利用这些同胚, 我们定义 $f : Q \to Q$ 为:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots),$$

这里, 对任意的 $n \geqslant 2, (x_1, y_n) = h_n(x_1, x_n)$. 显然, f 是边界保持的同胚.

下面证明 $g = p_{N\setminus\{1\}}\big| f(K) : f(K) \to \prod_{n=2}^{\infty} \mathbf{J}_n$ 是单射, 因此是嵌入. 否则, 存在 $x_1 \neq x_2, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ 使得 $(x_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots), (x_2, y_2, \cdots, y_n, \cdots) \in f(K)$. 选择 $n > 1$ 使得 $\frac{1}{n} < |x_1 - x_2|$. 那么 $(x_1, y_n), (x_2, y_n) \in h_n([a_1, b_1] \times [a_n, b_n])$, 矛盾于（ii）. 令

$$B = p_{N\setminus\{1\}}(f(K)) \subset \prod_{n=2}^{\infty} \mathbf{J}_n, \xi = p_1 \circ \left(p_{N\setminus\{1\}}\big| f(K)\right)^{-1} : B \to [a_1, b_1].$$

再令 $\lambda : \prod_{n=2}^{\infty} \mathbf{J}_n \to [a_1, b_1]$ 是 ξ 的连续扩张, $H : \mathbf{J}_1 \times [a_1, b_1] \to \mathbf{J}_1$ 为: 对任意的 $t \in [a_1, b_1]$, $H_t(x)$ 是经过点 $(-1,-1), (t, 0), (1,1)$ 的折线. 那么 H 是 $\mathbf{J}_1$ 到自身的 $[a_1, b_1]$-同痕且对任意的 $x \in [a_1, b_1]$, 有 $H(x, x) = 0$. 因此, 由定理 4.1.7, 下面定义的函数是 Q 到自身的同胚: 对任意的 $(x, y) \in \mathbf{J}_1 \times \prod_{n=2}^{\infty} \mathbf{J}_n$:

$$F(x, y) = (H(x, \lambda(y)), y).$$

显然, $F(B(Q)) = B(Q)$. 又, 如果 $(x, y) \in f(K)$, 那么,

$$\lambda(y) = \xi(y) = \left(p_1 \circ \left(p_{\infty\setminus\{1\}}\big| f(K)\right)^{-1}\right)(y) = x.$$

所以

$$F(x, y) = (H(x, \lambda(y)), y) = (H(x, x), y) = (0, y).$$

最后 $h = F \circ f$ 满足我们的要求. 如图 4-7 所示. 证毕.

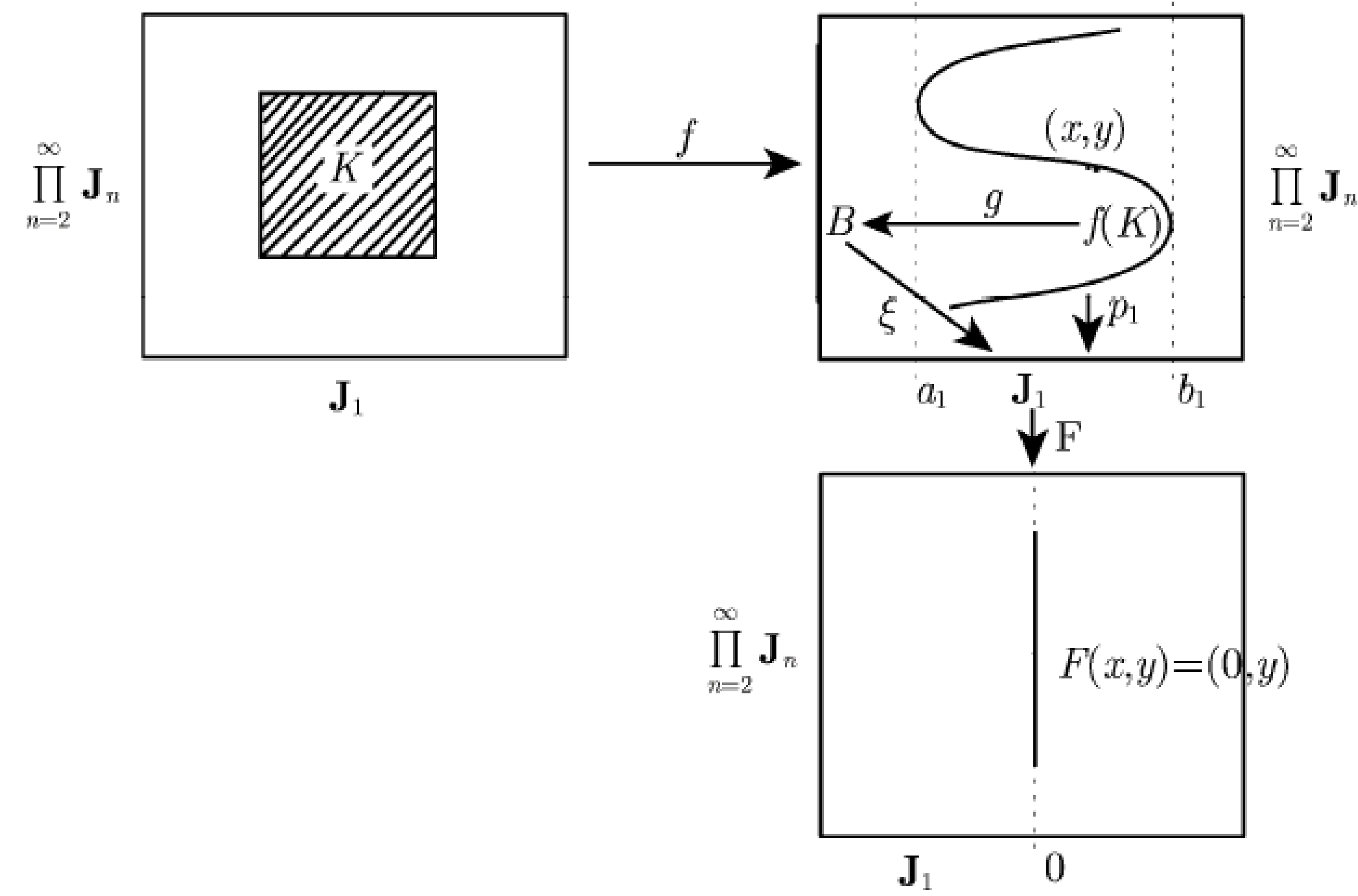


图 4-7 几个映射的定义

在上面引理的证明过程中，不能像定理 4.1.8 那样，我们不能要求 h 满足 $h|B(Q)=\mathrm{id}_{B(Q)}$. 事实上，因为 $B(Q)$ 是 Q 的稠密集合，所以满足 $h|B(Q)=\mathrm{id}_{B(Q)}$ 的同胚只能是恒等映射.

推论 4.3.1 对任意的非空紧集 $K\subset s$ 和 $\varepsilon>0$，存在无限集合 $N\subset$ ¥ 和边界保持的同胚 $h\in H(Q)$ 使得

（1） ¥ $\backslash N$ 也是无限的且 $\sum_{n\in N}2^{-n}<\varepsilon$;

（2） $d(h,\mathrm{id}_Q)<\varepsilon$;

（3） 对任意的 $n\in N$，有 $p_n h(K)=\{0\}$.

证明 选择 n 使得

$$\sum_{m=n}^{\infty}2^{-m}<\varepsilon.$$

那么，存在由无限集合构成的集合列 $(C_i)_{i=1}^{\infty}$ 使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}C_i=\quad\backslash\{1,2,\quad,n-1\},\ C_i\ \mathrm{I}\ \ C_j=\varnothing(i\neq j).$$

对任意的 i，应用引理 4.3.1 到乘积空间 $\prod_{m\in C_i}\mathbf{J}_m$ 和它的伪内部中的紧集 $p_{C_i}(K)$ 上，存在边界保持的同胚 $h_i:\prod_{m\in C_i}\mathbf{J}_m\to\prod_{m\in C_i}\mathbf{J}_m$ 使得 $p_{c_i}^0(h_i(p_{C_i}(K)))=\{0\}$，这里 $c_i=\min C_i$, $p_{c_i}^0:\prod_{m\in C_i}\mathbf{J}_m\to\mathbf{J}_{c_i}$ 是投影. 现在，令

$$N=\{c_i : i=1,2,\cdots\},\ h=\prod_{j=1}^{n}\mathrm{id}_{\mathbf{J}_j}\times\prod_{i=1}^{\infty}h_i : Q\to Q.$$

则容易验证 N 和 h 满足我们的要求. 证毕.

下面给出我们的关键引理. 为了叙述这个引理, 需要引入一些记号并约定一些特殊的集合和正实数, 这些集合和正实数将在定理的证明中具体给出. 定理的主要证明思想是: 利用推论 4.3.1, 通过一个 “小” 的同胚 h 把 E,F 映射到

$$Q_N=\{x\in Q : x(n)=0, \forall n\in N\}$$

中. 记

$$Q=Q_N\times Q_{\mathbb{N}\setminus N}.$$

这样, $Q,h(E),h(F)$ 在形式上非常像定理 4.1.8 中的 $\mathbf{J}^2,E,F$, 而对下面的引理, 将用类似于证明定理 4.1.8 但比证明定理 4.1.8 更复杂的方法来证明, 即存在一个 “小” 同胚 $t\in H(Q)$ 使得 $t(h(E))=h(F)$. 最后, 再利用 h 的逆作用可得到我们需要的同胚.

令 A,B 是 $\mathbb{N}$ 的一对互余的无限子集.

$$Q_A=\{(x_n)\in Q : \text{对任意的} n\notin A, x_n=0\},$$
$$Q_B=\{(x_n)\in Q : \text{对任意的} n\notin B, x_n=0\}.$$

那么, 可以认为 $Q=Q_A\times Q_B$. 用 $\mathbf{0}$ 记 Q_A,Q_B 中所有坐标为 0 的点, 称为原点. 那么, $\mathbf{0}=(\mathbf{0},\mathbf{0})$ 是 Q 的原点. 令 $\delta>0$ 且满足

$$\sum_{n\in B}2^{-n}<\frac{\delta}{2},$$

则 X,Y,Z 是 s 中的非空紧集且满足 $X\cup Y\subset Q_A$, $Z\subset Q_B$. 那么 $p:X\to Z$ 和 $q:Y\to Z$ 是同胚且满足

$$d(q^{-1}p,\mathrm{id}_X)<\gamma, \tag{4-3-1}$$

这里 $\gamma>0$ 是我们将指定的正实数. 同胚 $f\in H(Q)$ 如果满足对任意的 $n\in A(n\in B)$,

$$f(x)_n=x_n,$$

则 f 称为 Q_A- 同胚（Q_B- 同胚）. 因为我们认为 $Q=Q_A\times Q_B$，所以，Q_A- 同胚（Q_B- 同胚）事实上是垂直作用（水平作用）. 在以上的假定下，我们给出下面的引理:

引理 4.3.2 （1）存在边界保持的 A-同胚 $h_1\in H(Q)$ 使得对任意的 $x\in X$，有 $h_1(x,\mathbf{0})=(x,p(x))$;

（2）存在边界保持的 A-同胚 $h_2\in H(Q)$ 使得对任意的 $y\in Y$，有 $h_2(y,\mathbf{0})=(y,q(y))$;

（3）存在边界保持的 B-同胚 $h_3\in H(Q)$ 使得对任意的 $x\in X$，有 $h_3(x,p(x))=(q^{-1}p(x),p(x))$ 且 $d(h_3,\mathrm{id}_Q)<\gamma$.

证明 因为 X,Y,Z 是 s 中的紧集，故存在 $r_n>0$ 使得 $X\cup Y\cup Z\subset\prod_{n=1}^{\infty}[-r_n,r_n]$. 令

$$K_A=Q_A\cap\prod_{n=1}^{\infty}[-r_n,r_n],\ K_B=Q_B\cap\prod_{n=1}^{\infty}[-r_n,r_n].$$

那么，$X\cup Y\subset K_A\subset Q_A\approx Q$，$Z\subset K_B\subset Q_B\approx Q$..

（1）利用 Tietze 扩张定理（定理 2.7.3）的推论 3，存在 $p:X\to Z\subset K_B$ 的连续扩张 $\overline{p}:Q_A\to K_B$. 对每一个 n，定义从 $\mathbf{J}$ 到自身的 $[-r_n,r_n]$- 同痕 H^n: $\mathbf{J}_n\times[-r_n,r_n]\to\mathbf{J}_n$ 使得 H_t^n 是连接 $(-1,-1),(0,t),(1,1)$ 的折线. 由定理 4.1.8,

$$H=\prod_{n\in B}H^n:Q_B\times K_B\to Q_B$$

是 K_B- 同痕. 利用定理 4.1.8 的一个变形（交换乘积的顺序），我们可以定义 $h_1\in H(Q_A\times Q_B)$ 为:

$$h_1(x,y)=(x,H(y,\overline{p}(x))).$$

容易看出，h_1 是保持边界的 A-同胚. 又，对任意的 $x\in X$，有

$$\begin{aligned}h_1(x,\mathbf{0})&=(x,H(\mathbf{0},\overline{p}(x)))=(x,(H^n_{(p(x))_n}(0))_{n\in B})\\&=(x,(p(x))_{n\in B})=(x,p(x)).\end{aligned}$$

这样，h_1 满足了我们的全部要求.

（2）和（1）的证法完全相同.

(3) 如果 h_3 没有“小”同胚的要求 $d(h_3,\mathrm{id}_Q)<\gamma$，那么 (3) 是 (1) 和 (2) 的推论 (练习 4.3.A)．另外，我们不能要求 h_1,h_2 是“小”同胚，这是因为

$$d(h_1,\mathrm{id}_Q)\geqslant\sum_{n\in B}\frac{|p(x)_n|}{2^n}.$$

虽然如此，我们下面的证明思想仍然和 (1) 是类似的．

由我们的假设式 (4-3-1)，容易验证 $d(p^{-1},q^{-1})<\gamma$．利用 Tietze 扩张定理 (定理 2.7.3) 的推论 2 和推论 3，存在 p^{-1},q^{-1} 的连续扩张 $\xi,\eta:Q_B\to K_A$ 使得 $d(\xi,\eta)<\gamma$．对任意的 $(x,y)\in(-1,1)^2$，定义折线函数 $\phi_{(x,y)}:\mathbf{J}\to\mathbf{J}$ 经过 $(-1,-1),(x,y),(1,1)$．那么，$d(\phi_{(x,y)},\mathrm{id}_{\mathbf{J}})=|x-y|$．现在定义 $K_A\times K_A$-同痕 $F:Q_A\times(K_A\times K_A)\to Q_A$ 为：

$$F(q,x,y)=(\phi_{(x_n,y_n)}(q_n))_{n\in A}.$$

显然，当 $x\in X$，

$$F(x,x,y)=y. \tag{4-3-2}$$

利用定理 4.1.8，我们定义 B-同胚 $h_3:Q_A\times Q_B\to Q_A\times Q_B$ 为

$$h_3(x,y)=(F(x,\xi(y),\eta(y)),y).$$

如图 4-8 所示．

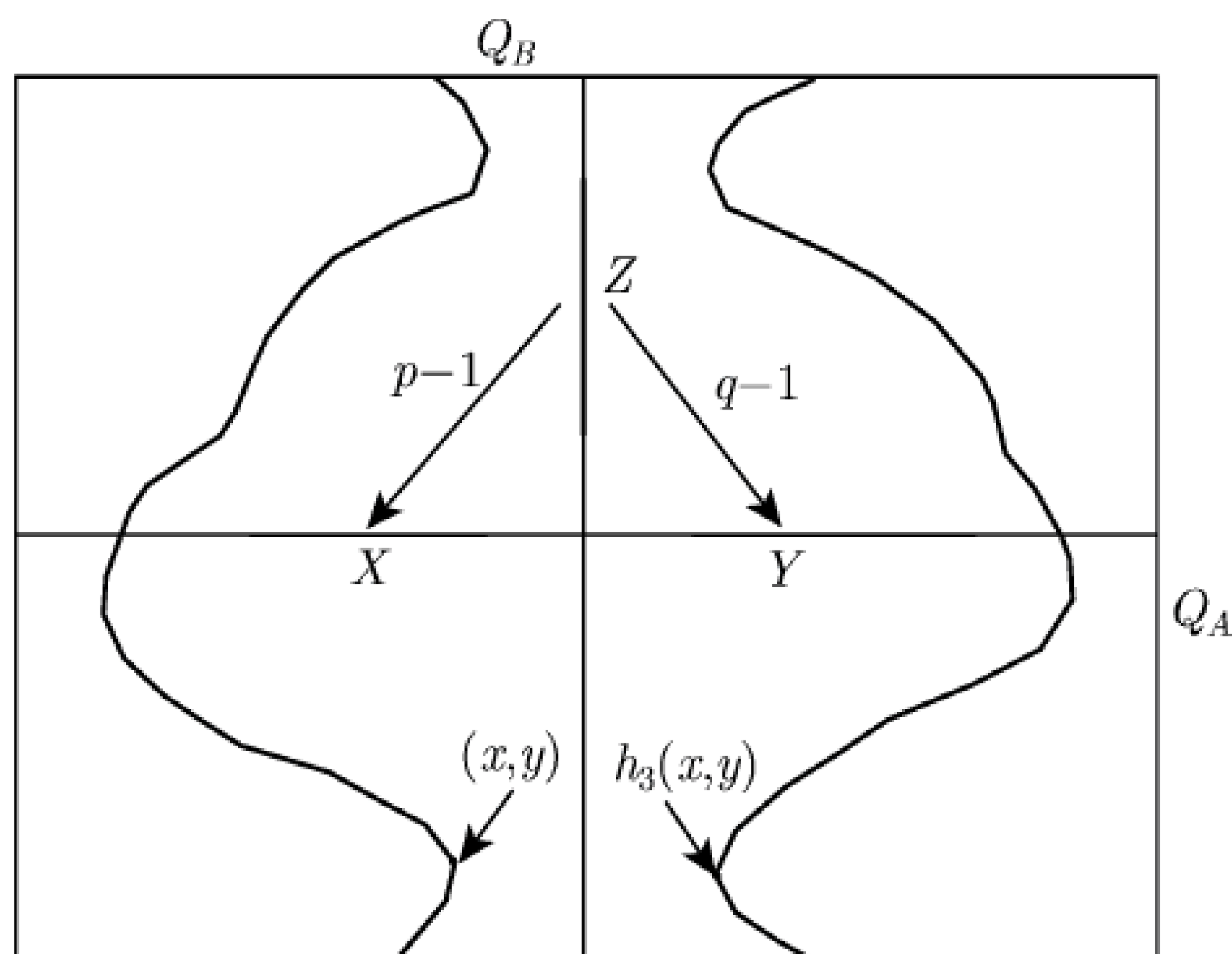


图 4-8 h_3 的定义

下面验证 h_3 满足其他要求．对任意的 $x\in X$，由式 (4-3-2)，



$$
\begin{aligned}
h_3(x,p(x)) &= (F(x,\xi(p(x)),\eta(p(x))),p(x))\\
&= (F(x,p^{-1}(p(x)),q^{-1}(p(x))),p(x))\\
&= (F(x,x,q^{-1}(p(x))),p(x))\\
&= (q^{-1}(p(x)),p(x)).
\end{aligned}
$$

又，对任意 $(x,y)\in Q_A\times Q_B=Q$，

$$
\begin{aligned}
d(h_3(x,y),(x,y)) &= \sum_{n\in A}\frac{\left|(F(x,\xi(y),\eta(y)))_n-x_n\right|}{2^n}\\
&= \sum_{n\in A}\frac{\left|\phi_{(\xi(y_n),\eta(y_n))}(x_n)-x_n\right|}{2^n}\\
&\leqslant \sum_{n\in A}\frac{d(\phi_{(\xi(y_n),\eta(y_n))},\mathrm{id}_{J_n})}{2^n}\\
&\leqslant d(\xi,\eta)<\gamma.
\end{aligned}
$$

所以，$d(h_3\mathrm{id}_Q)<\gamma$. 证毕.

最后给出本节的主要定理和它的证明.

定理 4.3.1 设 E,F 是 s 中的紧集，如果存在同胚 $f:E\to F$ 使得 $d(f,\mathrm{id}_E)<\varepsilon$. 那么存在 $\bar{f}\in H(Q)$ 使得 $\bar{f}|E=h$ 且 $d(\bar{f},\mathrm{id}_Q)<\varepsilon$.

证明 令 $\varepsilon_1=d(f,\mathrm{id}_Q),\ \delta=\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_1}{6}>0$. 我们给出了引理 4.3.1 中需要的 δ. 由推论 4.3.1，存在 $\mathbb{N}$ 的无限集 B 和边界保持的同胚 $g\in H(Q)$ 使得

(i) $d(g,\mathrm{id}_Q)<\delta$;

(ii) $p_Bg(E\cup F)=\{0\}$;

(iii) $A=\mathbb{N}\setminus B$ 是无限的且 $\sum\limits_{n\in B}2^{-n}<\dfrac{\delta}{2}$.

我们给出了需要的 A,B. 进一步，令 $X=g(E)$，$Y=g(F)$，那么 $X\cup Y\subset Q_A$，$h=g\circ f\circ g^{-1}:X\to Y$ 是同胚且

$$d(h,\mathrm{id}_X)<\varepsilon_1+2\delta=\gamma.$$

我们给出了需要的 X,Y 和 γ. 因为 $Q_B\cap s\approx s$，我们能够在 $Q_B\cap s$ 中找一个子

集 Z 使得 $X \approx Z$，并令 $p: X \to Z$ 是一个同胚. 再令 $q = p \circ h^{-1}: Y \to Z$，那么 q 也是一个同胚且 p, q 满足式（4-3-1）. 这样我们确切地给出引理 4.3.2 所需要的全部假定, 因此, 存在满足这个引理中的同胚 h_1, h_2, h_3. 注意到由（iii）可知

$$d(h_1, \mathrm{id}_Q) < \delta \text{ 且 } d(h_2, \mathrm{id}_Q) < \delta.$$

令 $t = h_2^{-1} \circ h_3 \circ h_1$，则 $t \in H(Q)$ 且 t 是 h 的扩张. 进一步,

$$d(t, \mathrm{id}_X) < \delta + \gamma + \delta = 4\delta + \varepsilon_1.$$

最后, 令 $\overline{f} = g^{-1} \circ t \circ g$，那么，$\overline{f}$ 是 f 的同胚扩张且

$$d(\overline{f}, \mathrm{id}_Q) < \delta + 4\delta + \varepsilon_1 + \delta = \varepsilon.$$

证毕.

练 习 4.3

4.3.A. 证明引理 4.3.2（3）的证明中的第一句的结论.

4.4 Z-集的同胚扩张定理 II

本节的主要目的是证明在上一节的主要定理中, 前提 $E, F \subset s$ 可以放宽到仅仅要求 $E, F \in \mathcal{Z}(Q)$. 为此, 我们仅需要证明对任意的紧集 $E \subset s$ 和任意的 $F \in \mathcal{Z}(Q)$，都存在保持边界的一个“小”同胚 $h \in H(Q)$ 使得 $h|(E) = \mathrm{id}_E$ 且 $h(F) \subset s$.

我们首先固定一些记号. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\theta \in \{-1, 1\}$，令

$$W_n(\theta) = \pi^{-1}(\{\theta\}),$$

即 $W_n(\theta)$ 是 Q 的第 n-方向的面. 另外, 我们固定一个紧集 $K \subset s$. 为实现我们

的目标，第一步是证明在保持 K 不动的前提下，每一个面都可通过一个“小”同胚压入到 s 中.

引理 4.4.1 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$\theta\in\{-1,1\}$ 和 $\varepsilon>0$，存在同胚 $h\in H(Q)$ 和 $m>n$ 使得

（1） $h(W_n(\theta))\cap\bigcup\{W_i(\mu):i<m,\mu\in\{-1,1\}\}=\varnothing$；

（2） $h(W_n(\theta))\subset W_m(1)$;

（3） $d(h,\mathrm{id}_Q)<\varepsilon$;

（4） $h|K=\mathrm{id}_K$.

证明 选择 $m>n$ 使得 $2^{-(m-3)}<\varepsilon$. 不妨假定 $\theta=1$. 再选择 $\delta\in\left(0,\dfrac{1}{2^{m-1}}\right)$ 使得 $p_{\{n,m\}}(K)\subset[-1,1-\delta]\times\mathbf{J}_m$. 由引理 4.3.1，存在 $\psi\in H(\mathbf{J}_n\times\mathbf{J}_m)$ 使得：

（i） $\psi|([-1,1-\delta]\times\mathbf{J}_m)=\mathrm{id}_{[-1,1-\delta]\times\mathbf{J}_m}$；

（ii） 对任意 $x\in\mathbf{J}_m$，$\psi(1,x)\in(1-\delta,1)\times\{1\}$.

像在引理 4.1.6 的证明中一样定义同胚 $h_1\in H(Q)$ 使得

$$p_{\{n,m\}}\circ h_1=p_{\{n,m\}}\circ\psi,\quad p_{\mathbb{N}\setminus\{n,m\}}\circ h_1=p_{\mathbb{N}\setminus\{n,m\}}.$$

那么，对任意的 $x\in Q$，当 $i\in\mathbb{N}\setminus\{n,m\}$ 时，$h_1(x)$ 的第 i 个坐标与 x 的第 i 个坐标相同；$h_1(x)$ 的第 n 个坐标与 x 的第 n 个坐标变化小于 $\delta\leqslant\dfrac{\varepsilon}{4}$. 于是:

（iii） $d(h_1,\mathrm{id}_Q)<\dfrac{\varepsilon}{4}+\dfrac{2}{2^m}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$;

（iv） $h_1|K=\mathrm{id}_K$;

（v） $h_1(W_n(\theta))\subset W_m(1)$.

对于空间 $\mathbf{J}^m=\mathbf{J}_1\times\mathbf{J}_2\times\cdots\times\mathbf{J}_m$，我们可以定义同胚 $\phi\in H(\mathbf{J}^m)$ 使得:

（vi） $d(\phi,\mathrm{id}_{\mathbf{J}^m})<\dfrac{\varepsilon}{2}$;

（vii） $\phi|p_{\{1,2,\cdots,m\}}(K)=\mathrm{id}_{p_{\{1,2,\cdots,m\}}}(K)$;

（viii） $\phi(\{x\in\mathbf{J}^m:x_m=1\})\subset(-1,1)\mathrm{H}^{m-1}\times\{1\}$.

如图 4-9 所示.

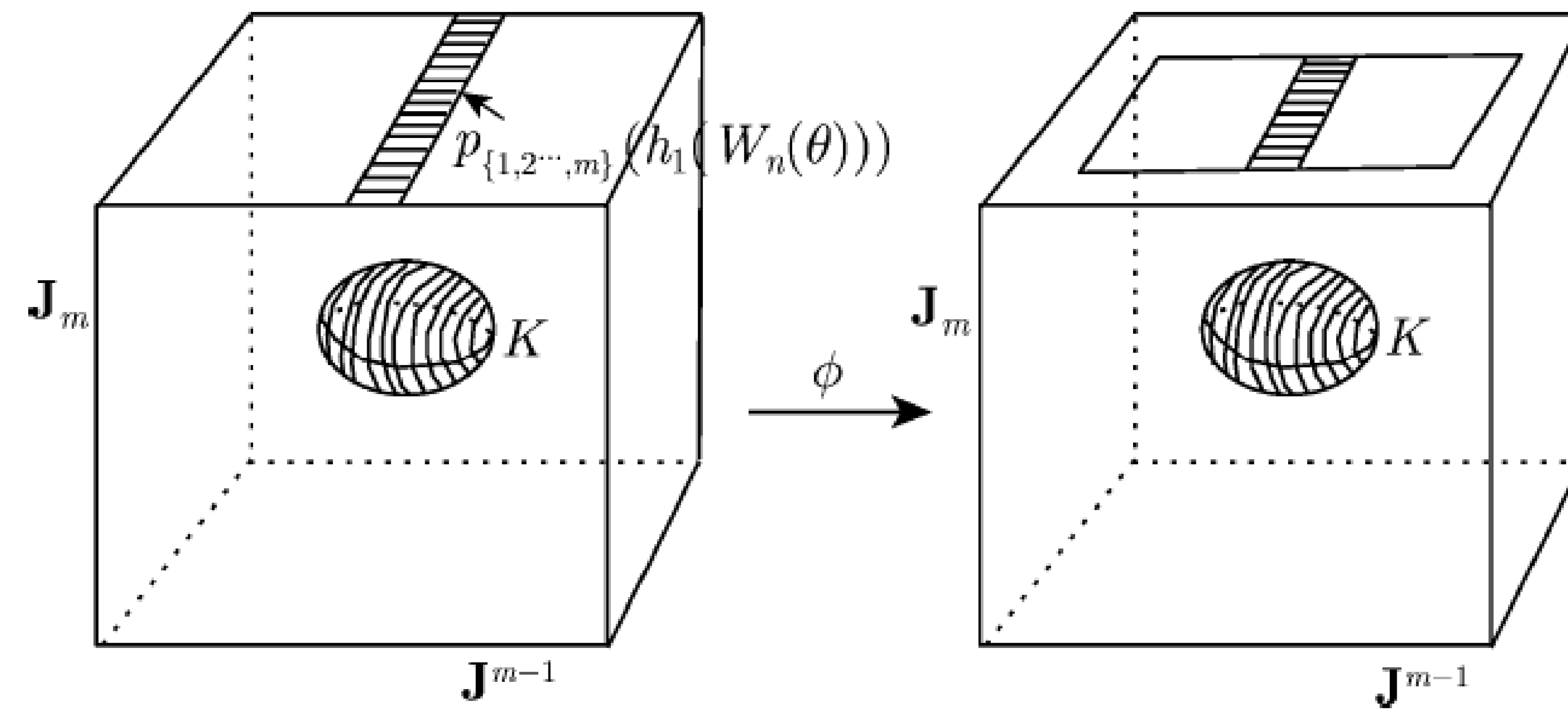


图 4-9 ϕ 的定义

最后，令 $h_2 \in H(Q)$ 使得

$$p_{\{1,2\cdots,m\}} \circ h_2 = p_{\{1,2\cdots,m\}} \circ \phi, \quad p_{\mathbb{N}\setminus\{1,2,\cdots,m\}} \circ h_1 = p_{\mathbb{N}\setminus\{1,2,\cdots,m\}}.$$

那么，容易验证 $h = h_2 \circ h_1$ 满足条件（i）至（iv）．证毕.

推论 4.4.1 对任意的 $n \in \mathbb{N}$，$\theta \in \{-1,1\}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在同胚 $h \in H(Q)$ 使得

（1） $h(W_n(\theta)) \subset s$;

（2） $d(h, \mathrm{id}_Q) < \varepsilon$;

（3） $h|K = \mathrm{id}_K$.

证明 利用引理 4.4.1，我们能定义自然数列 $n_1 = n < n_2 < \cdots$ 和同胚列 $h_1, h_2, \cdots, \in H(Q)$ 使得：

（i）对任意的 $i \in \mathbb{N}$，

$$h_i \circ h_{i-1} \circ \cdots \circ h_1(W_n(\theta)) \cap \bigcup \{W_j(\mu) : \mu \in \{-1,1\}, j < n_i\} = \varnothing$$

（ii）每一个 h_i 和 id_Q 充分接近使得

$$d(h_i, \mathrm{id}_Q) < \frac{\varepsilon}{2^i},$$

$$h = \lim_{i\to\infty} h_i \circ h_{i-1} \circ \cdots \circ h_1 \in H(Q) \text{ 且 } h(W_n(\theta)) \cap B(Q) = \varnothing,$$

（见引理 4.4.1 和定理 4.3.1）．

（iii）对任意的 i，$h_i|K = \mathrm{id}_K$.

那么，h 满足（i）至（iii）．证毕.

我们的第二步是证明对任意的 $A \in \mathcal{Z}(Q)$，存在“小”的同胚 $h \in H(Q)$

使得

$$h(A)\cap B(Q)=\varnothing \text{ 且 } h|K=\mathrm{id}_K .$$

为此，像前面一样，我们先证明如果 $B(Q)$ 被任意的面代替时，上面的结论成立.

引理 4.4.2 令 $A\in\mathcal{Z}(Q)$，那么对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$\theta\in\{-1,1\}$ 和 $\varepsilon>0$，存在同胚 $h\in H(Q)$ 使得:

(1) $h(A)\cap W_n(\theta)=\varnothing$;

(2) $d(h,\mathrm{id}_Q)<\varepsilon$;

(3) $h|K=\mathrm{id}_K$.

证明 由推论 4.4.1，存在同胚 $h_1\in H(Q)$ 使得:

(i) $d(h_1,\mathrm{id}_Q)<\dfrac{\varepsilon}{3}$;

(ii) $h_1|K=\mathrm{id}_K$;

(iii) $h_1(W_n(\theta))\subset s$.

那么，$K\cap h_1(W_n(\theta))=\varnothing$，注意到 $A\cup K\cup B(Q)\in\mathcal{Z}_\sigma(Q)$，所以由定理 4.2.2（3），存在连续映射

$$\alpha:Q\to Q\setminus(A\cup K\cup B(Q))\subset s$$

使得

(iv) $d(\alpha,\mathrm{id}_Q)<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

因为 $\inf\{d(\alpha(q),x):q\in Q,x\in A\cup K\}>0$，我们能够选择充分接近于 α 的同胚嵌入 $\beta:Q\to s\setminus(A\cup K)$，使得:

(v) $d(\beta,\mathrm{id}_Q)<\dfrac{2\varepsilon}{3}$.

由于 $K\cap(h_1(W_n(\theta))\cup\beta(h_1(W_n(\theta))))=\varnothing$，所以，

$$\gamma=\beta|h_1(W_n(\theta))\cup\mathrm{id}_K:h_1(W_n(\theta))\cup K\to\beta(h_1(W_n(\theta)))\cup K$$

是同胚，且容易验证 $d(\gamma,\mathrm{id}_Q)<\dfrac{2\varepsilon}{3}$. 如图 4-10 所示.

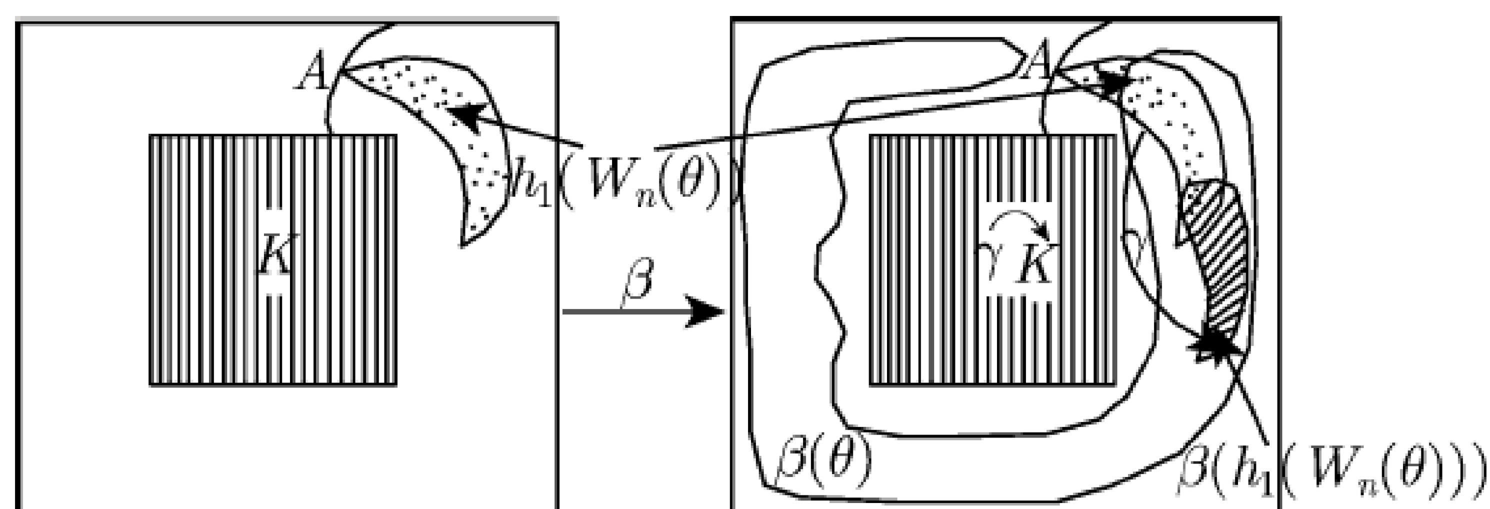


图 4-10　β 的定义

因为上面的同胚两边都是 s 中的紧集，所以应用定理 4.3.1 知 γ 的同胚扩张 $h_2 \in H(Q)$ 使得 $d(h_2, \mathrm{id}_Q) < \dfrac{2\varepsilon}{3}$. 则

$$h_2(h_1(W_n(\theta))) \cap A = \varnothing \text{ 且 } h_2 \big| K = \mathrm{id}_K.$$

所以 $h = (h_2 \circ h_1)^{-1}$ 满足引理的要求. 证毕.

现在可以证明下面的定理.

定理 4.4.1 令 $K \subset s$ 是紧集，$A \in \mathcal{Z}(Q)$. 那么，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在同胚 $h \in H(Q)$ 使得:

（1）$d(h, \mathrm{id}_K) < \varepsilon$;

（2）$h(A) \subset s$;

（3）$h \big| K = \mathrm{id}_K$.

证明 我们把 Q 的所有面排成一列，依次定义一列 Q 到自身的同胚使得每一个同胚都不改变 K 中的点且与恒等映射充分接近使得

（i）它们复合的极限 h 是同胚（利用引理 4.4.2）且 $d(h, \mathrm{id}_Q) < \varepsilon$;

（ii）$h(A) \cap B(Q) = \varnothing$（利用引理 4.1.3 和引理 4.4.2）.

那么，h 满足定理的要求. 证毕.

我们证明这一节的主要定理.

定理 4.4.2 令 $E, F \in \mathcal{Z}(Q)$，$h: E \to F$ 是同胚且 $d(h, \mathrm{id}_Q) < \varepsilon$，存在同胚 $\overline{h} \in H(Q)$ 使得 $d(\overline{h}, \mathrm{id}_Q) < \varepsilon$ 且 $\overline{h} \big| E = h$.

利用定理 4.4.1 和定理 4.4.1 立即可得. 证明略.

注 4.4.1（1）也许你认为，同胚扩张的存在性是重要的，“小”同胚的要求是不重要的. 但事实并非如此！“小”同胚的要求也是非常重要的，因为，正像你在前面看到的那样，“小”同胚的存在性能够保证我们制造新同胚.

(2) 定理 4.4.2 是在我们选定了度量的前提下成立的, 也就是说, 如果我们仅仅令 ρ 是空间 Q 上一个相容度量, 那么, 定理 4.4.2 对于 (Q,ρ) 未必成立, 但我们有下面的修订版.

定理 4.4.3 设 ρ 是空间 Q 上的相容度量. 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $E,F\in\mathcal{Z}(Q)$, 如果 $h:E\to F$ 是同胚且满足 $\rho(h,\mathrm{id}_Q)<\delta$, 则存在同胚 $\overline{h}\in H(Q)$ 使得 $\rho(\overline{h},\mathrm{id}_Q)<\varepsilon$ 且 $\overline{h}|E=h$.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$, 因为, $\mathrm{id}_Q:(Q,d)\to(Q,\rho)$ 是一致连续的, 所以, 存在 $\gamma>0$ 使得对任意的 $x,y\in Q$,

$$d(x,y)<\gamma \text{ 能推出 } \rho(x,y)<\varepsilon.$$

又, 因为 $\mathrm{id}_Q:(Q,\rho)\to(Q,d)$ 也是一致连续的, 所以存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $x,y\in Q$,

$$\rho(x,y)<\delta \text{ 能推出 } d(x,y)<\gamma.$$

那么, 利用定理 4.4.2 知 $\delta>0$ 满足要求. 证毕.

定义 4.4.1 设 $f:X\to Y$ 是连续映射, 如果 $f(X)\in\mathcal{Z}(Y)$, 则称 f 是 Z-**映射**. 进一步, 如果 f 还是同胚嵌入, 则称 f 是 Z-**嵌入**.

利用我们的主要结论, 能够证明下面有用的结果.

定理 4.4.4 设 X 是紧度量空间, A 是 X 的闭子集, $f:X\to Q$ 连续且使得 $f|A:A\to Q$ 是 Z-嵌入. 那么, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 Z-嵌入 $g:X\to Q$ 使得 $g|A=f|A$ 且 $d(f,g)<\varepsilon$.

证明 利用推论 4.2.1 和定理 4.2.2 (3) , 存在 $k_0\in C(X,s)$ 使得

$$d(f,k_0)<\frac{\varepsilon}{4}.$$

存在同胚嵌入 $k:X\to s$ 使得

$$d(f,k)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 s 中的任意紧集是 Q 的 Z-集, 所以, $k(X),k(A)\in\mathcal{Z}(Q)$. 进一步,

$$h=(f|A)\circ(k^{-1}|k(A)):\ k(A)\to f(A) \text{ 是同胚且 } d(h,\mathrm{id}_Q)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到 $k(A),f(A)\in\mathcal{Z}(Q)$, 因此, 定理 4.4.2 可以推出存在同胚扩张 $\overline{h}\in H(Q)$

使得

$$d(\overline{h},\mathrm{id}_Q)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

那么 $g=\overline{h}\circ k:X\to Q$ 满足定理的要求, 其中 g 是 Z-嵌入是因为 Z-集是同胚不变的. 证毕.

练 习 4.4

4.4.A. 设 X 是度量空间. 假设 $X=Q_0 \mathrm{U} Q_1$ 且 $Q_0\approx Q_1\approx Q_0 \mathrm{I}\ Q_1\approx Q$, $Q_0 \mathrm{I}\ Q_1 \in \mathcal{Z}(Q_0) \mathrm{I}\ \mathcal{Z}(Q_1)$. 证明 $X\approx Q$.

4.4. B. 证明 $X=Q\times S^1\oplus Q\times \mathbf{I}$ 是 Q-流形, 但定理 4.4.2 对 X 不真.

4.4. C. 把定理 4.4.4 中的 Q 用 s 代替, 证明结论仍然成立.

4.5 吸收子

本节将定义 Hilbert 方体中的吸收子并证明其在拓扑上的唯一性.

设 X 是一个空间, A 是 X 的子空间, 我们称 (X,A) 为**空间对**. 设 (X,A) 和 (Y,B) 是空间对, 如果存在同胚 $h:X\to Y$ 使得 $h(A)=B$, 那么我们称 (X,A) 和 (Y,B) 是**对同胚的**, 记作 $(X,A)\approx(Y,B)$. 显然, 如果 $(X,A)\approx(Y,B)$, 那么 $X\approx Y$ 且 $A\approx B$. 但反之不然, 见练习 4.5. A. 本节的目的是给出空间对 $(Q,B(Q))$ 的拓扑特征. 并利用这些特征证明, 可数无限个区间的乘积同胚于 ¡¥ 当且仅当这些区间中有无限个非紧; 对空间 ¡¥ 中任意可数多个紧集 $\{A_n : n\in ¥\}$, 有

$$? \setminus_{n\in ¥} A_n \approx ? \ .$$

同时, 这些特征也是下一节证明本章主要结论的重要工具.

下面假设 (M^Q,d) 是一个同胚于 Q 的度量空间.

定义 4.5.1 设 $A\in Z_\sigma(M^Q)$.

(1) 如果 A 满足下列条件, 则称 A 为 M^Q 的一个**吸收子**:

对任意的 $K,L\in\mathcal{Z}(M^{Q})$ 和 $\varepsilon>0$，存在同胚 $h\in H(M^{Q})$ 使得

(i) $d(h,\mathrm{id}_{M^{Q}})<\varepsilon$;

(ii) $h(L\setminus K)\subset A$;

(iii) $h\setminus K=\mathrm{id}_{K}$.

(2) 如果 A 可以写为满足下列条件的单调递增的 M^{Q} 中 Z- 集列 $(A_n)_n$ 之并 $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$，则称 A 为 M^{Q} 的一个**骨架子**:

对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $K\in\mathcal{Z}(M^{Q})$ 和 $\varepsilon>0$，存在同胚 $h\in H(M^{Q})$ 和 $m>n$ 使得:

(i) $d(h,\mathrm{id}_{M^{Q}})<\varepsilon$;

(ii) $h|A_n=\mathrm{id}_{A_n}$;

(iii) $h(K)\subset A_m$.

事实上，上面的两个概念是等价的，甚至，从拓扑上讲，M^{Q} 的骨架子和吸收子仅仅有一个. 准确地说，如果 A 是 M^{Q} 的吸收子，则

$$(M^{Q},A)\approx(Q,B(Q)).$$

这是本节的第一个目标. 为了证明上面的两个概念是等价的，首先证明下面比较容易的一个方向.

定理 4.5.1 M^{Q} 的每一个骨架子一定是 M^{Q} 的一个吸收子.

证明 设 A 是 M^{Q} 的一个骨架子，那么可以进一步设，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 使得 (A_n) 满足定义 4.5.1 (2) 的要求. 为了证明 A 是 M^{Q} 的一个吸收子，设 $K,L\in\mathcal{Z}(M^{Q})$，$\varepsilon>0$. 那么，由引理 2.7.1，存在闭集列 $\varnothing=L_0\subset L_1\subset\cdots$ 使得

$$L\setminus K=\bigcup_{i=0}^{\infty}L_i.$$

下面归纳地定义一列同胚 $h_i\in H(M^{Q})$ 和一列自然数 $1=n(0)<n(1)<\cdots$ 使得对任意的 i，下列条件成立:

(i) $d(h_i,\mathrm{id}_{M^{Q}})$ 充分小使得 $h=\lim_{i\to\infty}h_i\circ h_{i-1}\circ\cdots\circ h_0\in H(M^{Q})$ 且 $d(h,\mathrm{id}_{M^{Q}})<\varepsilon$，见定理 4.4.1;

(ii) $h_i\circ h_{i-1}\circ\cdots\circ h_0(L_i)\subset A_{n(i)}$;

(iii) $h_i|(K\cup A_{n(i-1)})=\mathrm{id}_{K\cup A_{n(i-1)}}$.

这时，显然 $h\in H(M^{\Omega})$ 满足定义 4.5.1（1）中的要求．从而，我们仅仅需要完成归纳定义即可．

显然，$h_0=\mathrm{id}_{M^{\Omega}}$ 和 $n(1)=1$ 满足上面的条件．

现在，假定 $h_0,h_1,\cdots,h_i$ 和 $n(1)<n(2)\cdots<n(i)$ 已经定义且满足归纳假定．我们定义 $h_{i+1}\in H(M^{\Omega})$ 和 $n(i+1)>n(i)$．令 $B=h_i\circ\cdots\circ h_0(L_{i+1})$，那么由归纳假定（iii）和 L_{i+1} 的定义，我们有

$$B\in\mathcal{Z}(M^{\Omega})\text{ 且 }B\cap K=h_i\circ\cdots\circ h_0(L_{i+1}\cap K)=\varnothing.$$

于是

$$\gamma=\inf\{d(x,y):x\in B,y\in K\}>0.$$

存在 $\delta>0$ 使得 $h_{i+1}\in H(M^{\Omega})$ 满足当 $d(h_{i+1},\mathrm{id}_{M^{\Omega}})<\delta$ 时，（i）成立．由定理 4.4.3，存在 $\xi\in(0,\gamma)$ 使得在 M^{Ω} 的 Z-集之间的任何和恒等映射小于 ξ 的同胚都能扩张为 M^{Ω} 之间和恒等映射小于 δ 的同胚．因此，由于 (A_n) 满足定义 4.5.1（2）的要求，存在同胚 $f\in H(M^{\Omega})$ 和 $n(i+1)>n(i)$ 使得

$$d(f,\mathrm{id}_{M^{\Omega}})<\xi<\gamma,\ f|A_{n(i)}=\mathrm{id}_{A_{n(i)}},\ f(B)\subset A_{n(i+1)}. \tag{4-5-1}$$

$n(i+1)$ 和 f 几乎满足归纳假定，不成立的仅仅是 $f|K=\mathrm{id}_K$．所以，我们需要对 f 做一点修订．事实上，考虑

$$(f|B)\cup\mathrm{id}_{A_{n(i)}\cup K}=(f|(B\cup A_{n(i)}))\cup\mathrm{id}_K:B\cup A_{n(i)}\cup K\to f(B)\cup A_{n(i)}\cup K.$$

由 γ 的定义和式（4-5-1），它是 M^{Ω} 中两个 Z-集之间和恒等映射的距离小于 ξ 的同胚，因此，由 ξ 的定义，存在一个和恒等映射的距离小于 δ 的同胚扩张 $h_{i+1}:M^{\Omega}\to M^{\Omega}$，那么 $n(i+1)$ 和 h_{i+1} 满足归纳假定．证毕．

下面的定理给出了吸收子的基本性质，特别是，吸收子是唯一的．

定理 4.5.2（1）如果 A 是 Q 的吸收子，$h:M^{\Omega}\to M^{\Omega}$ 是同胚，那么，$h(A)$ 也是 M^{Ω} 的吸收子；

（2）如果 $A,B\in\mathcal{Z}_{\sigma}(M^{\Omega})$ 且 A 是 M^{Ω} 的吸收子，那么，$A\cup B$ 也是 M^{Ω} 的吸收子；

（3）如果 A,B 是 M^{Ω} 的吸收子，$\varepsilon>0$，那么，存在 $h\in H(M^{\Omega})$ 使得

$h(A)=B$ 且 $d(h,\mathrm{id}_{M^{\Omega}})<\varepsilon$.

证明 (1) 由 h 的一致连续性得到，(2) 是显然的，我们仅仅需要证明 (3). 令

$$A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n,\ \ B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n,$$

这里，所有的 A_n 和 B_n 都是 M^{Ω} 的 Z-集. 首先，在 $H(M^{\Omega})$ 中归纳地定义一个序列 (f_n) 使得：

① $d(f_n,\mathrm{id}_{M^{\Omega}})$ 充分小使得 $f=\lim_{n\to\infty}g_n\in H(M^{\Omega})$ 且 $d(f,\mathrm{id}_{M^{\Omega}})<\varepsilon$;

② $B_n\subset f_n\circ g_{n-1}(A)$;

③ $f_n\circ g_{n-1}(A_n)\subset B$;

④ $f_n\left|\bigcup_{i=1}^{n-1}(g_{n-1}(A_i)\cup B_i)=\mathrm{id}_{\bigcup_{i=1}^{n-1}(g_{n-1}(A_i)\cup B_i)}\right.$,

这里，$g_{n-1}=f_{n-1}\circ\cdots\circ f_1$.

假设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 已经定义. 首先选择 $\delta>0$ 充分小使得当 $d(f_{n+1},\mathrm{id}_{M^{\Omega}})<\delta$ 时，①成立. 令

$$K=\bigcup_{i=1}^{n}(g_n(A_i)\cup B_i).$$

由归纳假定 $K\subset B$ 且 $K,g_n(A_{n+1})\in\mathcal{Z}(M^{\Omega})$. 因此，由于 B 是吸收子，我们能够在保持 K 不动的情况下通过任意小的同胚把 $g_n(A_{n+1})$ 吸收在 B 中，从而，存在 $\alpha\in H(M^{\Omega})$ 使得：

⑤ $d(\alpha,\mathrm{id}_{M^{\Omega}})<\dfrac{\delta}{2}$;

⑥ $\alpha(g_n(A_{n+1}))\subset B$;

⑦ $\alpha|K=\mathrm{id}_K$.

现在，$\alpha(g_n(A))$ 是 M^{Ω} 的吸收子. 令

$$K'=K\cup\alpha(g_n(A_{n+1})).$$

则 $K'\subset\alpha(g_n(A))$ 且 $K',B_{n+1}\in\mathcal{Z}(M^{\Omega})$，所以，存在同胚 $\beta\in H(M^{\Omega})$ 使得

⑧ $d(\beta,\mathrm{id}_{M^{\Omega}})<\dfrac{\delta}{2}$;

⑨ $\beta(B_{n+1})\subset\alpha(g_n(A))$;

⑩ $\beta|K' = \mathrm{id}_{K'}$.

令 $f_{n+1} = \beta^{-1} \circ \alpha$. 我们验证 f_{n+1} 满足归纳的条件. 显然, $d(f_{n+1}, \mathrm{id}_{M^Q}) < \delta$, 故①成立. 由⑨知, $\beta(B_{n+1}) \subset \alpha(g_n(A))$. 因此,

$$B_{n+1} \subset \beta^{-1}(\alpha(g_n(A))) = f_{n+1}(g_n(A)).$$

即②成立. 由⑥和⑩知 $\alpha(g_n(A_{n+1})) \subset \beta(B)$. 所以,

$$f_{n+1}(g_n(A_n)) = \beta^{-1}(\alpha(g_n(A_n))) \subset B.$$

③ 成立. 最后, 显然, ④可以由⑦和⑩得到.

归纳定义完成. 令 $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \circ \cdots \circ f_1 = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. 那么, 由①知 $f \in H(M^Q)$ 且 $d(f, \mathrm{id}_{M^Q}) < \varepsilon$. 下面, 我们验证 $f(A) = B$, 完成了证明.

由③, ④知

$$f(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(A_n) \subset B. \tag{4-5-2}$$

又, 对任意的 n, 由④, ②知

$$\begin{aligned} B_n &= \lim_{n<m\to\infty} (f_m \circ \cdots f_{n+1}(B_n)) = \lim_{n<m\to\infty} (f_m \circ \cdots f_{n+1} \circ g_n)(g_n^{-1}(B_n)) \\ &= f \circ g_n^{-1}(B_n) \subset f \circ g_n^{-1}(f_n(g_{n-1}(A))) \subset f(g_n^{-1}(g_n(A))) \\ &= f(A). \end{aligned}$$

因此,

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset f(A).$$

结合式 (4-5-2) 知 $f(A) = B$. 证毕.

结合上面定理的 (2), (3), 有:

推论 4.5.1 如果 $A, B \in \mathcal{Z}_\sigma(M^Q)$ 且 A 是 M^Q 的吸收子, 那么, 存在同胚 $h \in H(M^Q)$ 使得 $h(A \cup B) = A$.

我们需要给出 Q 的一个骨架子说明骨架子和吸收子确实是存在的. 为此, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\Sigma_n = \prod_{i=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}\right]_i = \{x \in Q : |x_i| \leqslant 1 - 2^{-n}\}.$$

我们称

$$\Sigma=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Sigma_n=\left\{x\in Q:\sup_{i=1,2,\cdots}|x_i|<1\right\}$$

为 Q 的**真内部.**

定理 4.5.3 Σ 是 Q 的一个骨架子.

证明 由定理 4.2.3（2）知所有的 Σ_n 都是 Q 的 Z-集, 因此, $\Sigma\in\mathcal{Z}_\sigma(Q)$. 对任意的 $K\in\mathcal{Z}(Q), n\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$, 由定理 4.4.1 知, 存在 $h\in H(Q)$ 使得

$$d(h,\mathrm{id}_Q)<\varepsilon,\ h(K)\subset s\ 且\ h|\Sigma_n=\mathrm{id}_{\Sigma_n}.$$

选择 m 充分大使得

$$\sum_{i=m}^{\infty}2^{-i}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

对此 m, 选择 $k>n$, 使得对任意的 $i\leqslant m$,

$$p_i(h(K))\subset[-1+2^{-k},1-2^{-k}].$$

又, 对任意的 $i>m$, 选择同胚 $h_i:\mathbf{I}_i\to\mathbf{I}_i$ 使得:

（i） $h_i([\min p_i(h(K)),\max p_i(h(K))])\subset[-1+2^{-k},1-2^{-k}]$;

（ii） $h_i|[-1+2^{-n},1-2^{-n}]=\mathrm{id}_{[-1+2^{-n},1-2^{-n}]}$.

利用它们定义同胚 $f\in H(Q)$ 为: 对任意的 $x=(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},x_{m+2},\cdots)$,

$$f(x)=(x_1,\cdots,x_m,h_{m+1}(x_{m+1}),h_{m+2}(x_{m+2}),\cdots).$$

那么, f 确实是一个同胚且

$$d(f,\mathrm{id}_Q)<\frac{\varepsilon}{2},\ f|\Sigma_n=\mathrm{id}_{\Sigma_n}.$$

显然, $f\circ h$ 和 $k>n$ 满足

$$d(f\circ h,\mathrm{id}_Q)<\varepsilon,\ \ f\circ h(K)\subset\Sigma_k,\ \ f\circ h|\Sigma_n=\mathrm{id}_{\Sigma_n}.$$

所以, Σ 是 Q 的骨架子. 证毕.

推论 4.5.2 Q的每一个吸收子都是骨架子.

证明 由上面的定理, Σ是Q的骨架子, 从而, 由定理 4.5.1, Σ是Q的吸收子. 再由定理 4.5.2（3）知, 吸收子在同胚意义上是唯一的, 因此, 对Q的每一个吸收子A, 都有$(Q,A)\approx(Q,\Sigma)$, 因此, A也是骨架子. 证毕.

至此, 我们完成了本节的第一个目标. 所以, Q^M中骨架子和吸收子是相同的且从同胚的意义上讲仅仅有一个. 一般来讲, 骨架子的定义往往用来验证Q^M的一个子空间是否是骨架子, 而吸收子的定义往往用来给出它的性质. 本节的第二个目标是给出上面结果的直接应用, 包括证明$B(Q)$是Q的吸收子.

回忆一下, 对任意的$n\in ¥, \theta\in\{-1,1\}, W_n(\theta)=p_n^{-1}(\theta)$, 称其为Q的一个面. 令

$$\mathcal{B}(Q)=\{W_n(\theta):n\in ¥,\theta\in\{-1,1\}\}.$$

那么

$$B(Q)=\bigcup\mathcal{B}(Q).$$

我们有下面的引理.

引理 4.5.1 对任意的无限子集$\mathcal{A}\subset\mathcal{B}(Q)$, 存在$h\in H(Q)$使得$h(\Sigma)\subset\bigcup\mathcal{A}$, 从而$\bigcup\mathcal{A}$是$Q$的吸收子.

证明 显然, 我们能不失一般性地进行假定, 存在无限集$N\subset ¥$使得

$$\mathcal{A}=\{W_n(1):n\in N\}.$$

我们可以给出¥ 的一个分划

$$\{N_m:m\in ¥\},$$

使得对任意的$m\in ¥, N_m$是无限的且

$$\min N_m\in N.$$

对任意的$m\in ¥$, 令

$$Q_m=\prod_{i\in N_m}[-1,1]_i=[-1,1]^{N_m}\approx Q.$$

那么，$Q=\prod_{m\in\mathbb{N}} Q_m$. 进一步，在每一个 Q_m 中应用定理 4.4.2，存在同胚 $h_m \in H(Q_m)$，使得

$$h_m\left(\left[-1+\frac{1}{2^m},1-\frac{1}{2^m}\right]^{N_m}\right)=\left\{x\in Q_m : x_{\min N_m}=1\right\}.$$

那么，很容易看到，

$$h=h_1\times h_2\times\cdots\times h_m\cdots,$$

满足 $h(\Sigma)\subset\cup\mathcal{A}$.

最后一个结论由 $\cup\mathcal{A}\in\mathcal{Z}_\sigma(Q)$、定理 4.5.3 和定理 4.5.2（1）和（2）得到. 证毕.

我们得到下面一个重要结果.

定理 4.5.4 对于 Q 的子集 A，$(Q,A)\approx(Q,B(Q))$ 的充分必要条件是 A 是 Q 的吸收子.

这个定理是证明一个空间同胚于 $B(Q)$ 或者 s 的基本方法. 下面是两个直接的例子.

推论 4.5.3 设 A 是空间 $\mathbb{R}^\infty$ 的子集且可以表示为可数多个紧集的并，那么，

$$\setminus A\approx \quad .$$

证明 我们认为 $\mathbb{R}^\infty$ 是 $s\subset Q$. 那么，$A\in\mathcal{Z}_\sigma(Q)$. 于是，$A\cup B(Q)$ 是 Q 的吸收子. 所以，由上面的定理知

$$(Q,A\cup B(Q))\approx(Q,B(Q)).$$

因此，

$$(Q,s\setminus A)=(Q,Q\setminus(A\cup B(Q)))\approx(Q,Q\setminus B(Q))=(Q,s).$$

故，$s\setminus A\approx s$，即

$$\setminus A\approx \quad .$$

证毕.

推论 4.5.4 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，设 I_n 是非退化的区间，那么

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n \approx \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

当且仅当有无限多个 I_n 是非紧的.

证明 如果 I_n 中仅有有限多个非紧，那么，由定理 4.4.5 知 $\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$ 是局部紧的. 因此，$\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n \not\approx \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. 如果 I_n 中有无限多个非紧，那么，不妨设所有的 I_n 都是 $(-1,1),[-1,1),(-1,1],[-1,1]$ 中的一个. 这时，有无限多个 n 使得 $I_n \neq [-1,1]$. 所以存在无限集 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(Q)$ 使得 $Q \setminus \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n = \bigcup \mathcal{A}$. 由定理 4.5.4 和引理 4.5.1 知

$$(Q,s) \approx (Q, Q\setminus \bigcup\mathcal{A}) = \left(Q, \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n\right).$$

因此，

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n \approx s \approx \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

证毕.

练 习 4.5

4.5. A. 证明 $(\mathbf{I},\{0\}) \not\approx \left(\mathbf{I},\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$.

4.5. B. 证明 $\mathcal{B}(Q)\times Q$ 和 $\mathcal{B}(Q)\times\mathcal{B}(Q)$ 都是 $Q\times Q$ 的吸收子.

4.5. C. 设 $A\in\mathcal{Z}_\sigma(Q)$ 是 Q 的吸收子，$B\in\mathcal{Z}(Q)$，证明 $A\setminus B$ 也是 Q 的吸收子. (提示:因为 A 也是 Q 的骨架子，从而 $A=\bigcup A_i$ 满足骨架子的要求，令 $B_i=\left\{x\in A_i : d(x,B)\geqslant\frac{1}{i}\right\}$. 验证 $\bigcup B_i$ 是 Q 的骨架子，从而 $A\setminus B$ 也是.)

4.5. D. 设 $-1<a_n<b_n<1$，令

$$A=\{(x_n)\in Q : \text{最多存在有限多个 } n \text{ 不满足 } x_n\in[a_n,b_n]\}.$$

证明 A 是 Q 的吸收子.

4.6 Anderson 定理

本节将证明下面的 Anderson 定理.

定理 4.6.1 (Anderson 定理) Hilbert 空间ℓ^2同胚于无限可数多条实直线的乘积$\mathbb{R}^\infty$, 即

$$\ell^2 \approx \mathbb{R}^\infty$$

我们知道, $\mathbb{R}^\infty \approx s$, 这样, 为了得到上述结果, 我们仅需要证明$\ell^2 \approx s$. 而 s 是 Q 的一个子空间且其余集是 Q 的一个吸收子. 在本节, 我们将给出一个与ℓ^2同胚的空间 l 的一个紧化 K 使得 $K \approx Q$ 且 $K \setminus l$ 是 K 的吸收子. 这样, 用上一节的吸收子的唯一性知我们的结论成立.

事实上, K 是 Q 的子空间:

$$K = \left\{ x \in Q : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leqslant 1 \right\}.$$

称 K 为**椭圆 Hilbert 方体**. 我们的第一个目标是证明 $K \approx Q$.

回忆一下, 对 $n = 1, 2, \cdots$,

$$\mathbf{B}^n = \left\{ x \in \mathbf{J}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1 \right\}.$$

依此, 我们可以认为 $\mathbf{B}^\infty = K$, $\mathbf{J}^\infty = Q$. 对任意的 $n < \infty$, 我们能够建立 $\mathbf{B}^n$ 与 $\mathbf{J}^n$ 之间的一个同胚, 但是, 同样的方法对 $n = \infty$ 是无效的. 所以, 我们需要一个更复杂的方法来证明 K 和 $Q = \mathbf{J}^\infty$ 也是同胚的. 下面先给出一个定义:

对任意的 $n = 1, 2, \cdots, \infty$, 定义 $\Phi_n : \mathbf{J}^n \to \mathbf{B}^n$ 为: 对任意的 $x = (x_i) \in \mathbf{J}^n, i \leqslant n$, 归纳地定义 $\Phi_n(x)_i$ 为:

$$\Phi_n(x)_i = y_i = \begin{cases} x_1, & \text{如果} i = 1, \\ \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{i-1} y_j^2} \cdot x_i, & \text{如果} i > 1. \end{cases}$$

引理 4.6.1 对任意的 $n \in \quad \{\infty\}$, $\Phi_n : \mathbf{J}^n \to \mathbf{B}^n$ 是一个连续映射, 且对任

意的 $i\leqslant n$, $\Phi_n(x)_i$ 由 x 的前 i 个坐标确定.

证明 我们用归纳法证明, 对任意的 $i\leqslant n$, $\sum_{j=1}^{i} y_j^2\leqslant 1$.

事实上, 当 $i=1$ 时, 由于 $y_1=x_1$, 所以, $y_1^2=x_1^2\leqslant 1$.

假设 $i<n$ 且 $\sum_{j=1}^{i-1} y_j^2\leqslant 1$. 则由定义, $y_i=\sqrt{1-\sum_{j=1}^{i-1} y_j^2}\cdot x_i$. 所以

$$y_i^2=\left(1-\sum_{j=1}^{i-1} y_j^2\right)\cdot x_i^2\leqslant 1-\sum_{j=1}^{i-1} y_j^2,$$

即

$$\sum_{j=1}^{i} y_i^2\leqslant 1.$$

我们证明了, 对任意的 $i\leqslant n$, $\sum_{j=1}^{i} y_j^2\leqslant 1$. 这说明 $\Phi_n:\mathbf{J}^n\to\mathbf{B}^n$ 确实是映射. 其连续性是显然的. 最后一个结论由定义得到. 证毕.

但是, $\Phi_n:\mathbf{J}^n\to\mathbf{B}^n$ 并不是单射 $(n>1)$. 我们将证明 $\Phi_n:\mathbf{J}^n\to\mathbf{B}^n$ 是近似同胚. 为此, 我们给出这个映射的另一个表达式. 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $\Psi_n:\mathbf{B}^n\times\mathbf{J}\to\mathbf{B}^{n+1}$ 为: 对任意的 $((x_1,x_2,\cdots,x_n),t)\in\mathbf{B}^n\times\mathbf{J}$,

$$\Psi_n((x_1,x_2,\cdots,x_n),t)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,\sqrt{1-\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\cdot t\right).$$

引理 4.6.2 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $\Psi_n:\mathbf{B}^n\times\mathbf{J}\to\mathbf{B}^{n+1}$ 是连续满射且

$$\Phi_{n+1}=\Psi_n\circ(\Phi_n\times\mathrm{id}_{\mathbf{J}}). \tag{4-6-1}$$

证明 对任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})\in\mathbf{B}^{n+1}$, 我们考虑两种情况.

情况 1. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$. 这时, $x_{n+1}=0$. 所以,

$$((x_1,x_2,\cdots,x_n),0)\in\mathbf{B}^n\times\mathbf{J} \text{ 且 } \Psi_n((x_1,x_2,\cdots,x_n),0)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}).$$

情况 2. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2<1$. 这时,

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{B}^n,\ t=\frac{x_{n+1}}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}\in\mathbf{J}$$

且

$$\Psi_n((x_1,x_2,\cdots,x_n),t)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}).$$

Ψ_n 的连续性是显然的. 最后, 式（4-6-1）由定义立即得到. 证毕.

引理 4.6.3 对任意的 $n\in$ $\{\infty\}$, $\Phi_n:\mathbf{J}^n\to\mathbf{B}^n$ 是连续满射.

证明 当 $n=1$ 时, $\Phi_n=\mathrm{id}_{\mathbf{J}}$ 是满射.

对于 $n\in\{2,3,\cdots\}$, 使用上面的引理和数学归纳法得到.

当 $n=\infty$ 时, 对所有的 $m\in\mathbb{N}$, 定义 $j_m:\mathbf{J}^m\to Q$ 为:

$$j_m(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots).$$

则 j_m 连续且 $j_m(\mathbf{B}^m)\subset\mathbf{B}^\infty$.

容易验证下面交换图.

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{J}^m & \xrightarrow{\Phi_m} & \mathbf{B}^m\\ j_m\downarrow & & j_m\downarrow\\ Q & \xrightarrow{\Phi_\infty} & \mathbf{B}^\infty\end{array}$$

从而

$$\Phi_\infty(Q)\supset\Phi_\infty\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}j_m(\mathbf{J}^m)\right)=\bigcup_{m=1}^{\infty}(\Phi_\infty\circ j_m)(\mathbf{J}^m)$$
$$=\bigcup_{m=1}^{\infty}(j_m\circ\Phi_m)(\mathbf{J}^m)=\bigcup_{m=1}^{\infty}j_m(\mathbf{B}^m).$$

最后, 注意到 $\Phi_\infty(Q)$ 是紧的, 由 $\bigcup_{m=1}^{\infty}j_m(\mathbf{B}^m)$ 在 $\mathbf{B}^\infty$ 中稠密知 $\Phi_\infty(Q)=\mathbf{B}^\infty=K$. 所以 Φ_∞ 是满射. 证毕.

我们需要下面的映射及其性质. 令

$$\mathbf{B}^2_r=\{(y_1,y_2)\in\mathbf{B}^2:y_1\geqslant 0\}.$$

定义 $\phi:\mathbf{I}\times\mathbf{J}\to\mathbf{B}^2_r$ 为

$$\phi(s,t)=(s,\sqrt{1-s^2}t).$$

那么 ϕ 是连续满射. 进一步, 我们有:

引理 4.6.4 $\phi:\mathbf{I}\times\mathbf{J}\to\mathbf{B}^2_r$ 是近似同胚且对任意的 $(x,t)\in\mathbf{B}^n\times\mathbf{J}$,
r

$$\Psi_n(x,t)=\left(\phi\|x\|,t)_1x^0,\phi(\|x\|,t)_2\right),\tag{4-6-2}$$

这里 $x^0 \in S^{n-1}$ 满足 $x = \|x\| x^0$.

证明 注意到 $\phi(\{1\}\times \mathbf{J}) = \{(1,0)\}$ 是单点集. 因此, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 由于 $\mathbf{J}$ 是紧的, 利用 Wallace 定理（定理 4.3.5）, 存在 $\delta \in (0,1)$ 使得

$$\operatorname{diam} \phi([1-\delta,1]\times \mathbf{J}) < \varepsilon.$$

显然, 存在同胚 $h_0 : [1-\delta,1]\times \mathbf{J} \to \phi([1-\delta,1]\times \mathbf{J})$, 使得对任意的 $t \in \mathbf{J}$,

$$h_0(1-\delta,t) = \phi(1-\delta,t).$$

如图 4-11 所示.

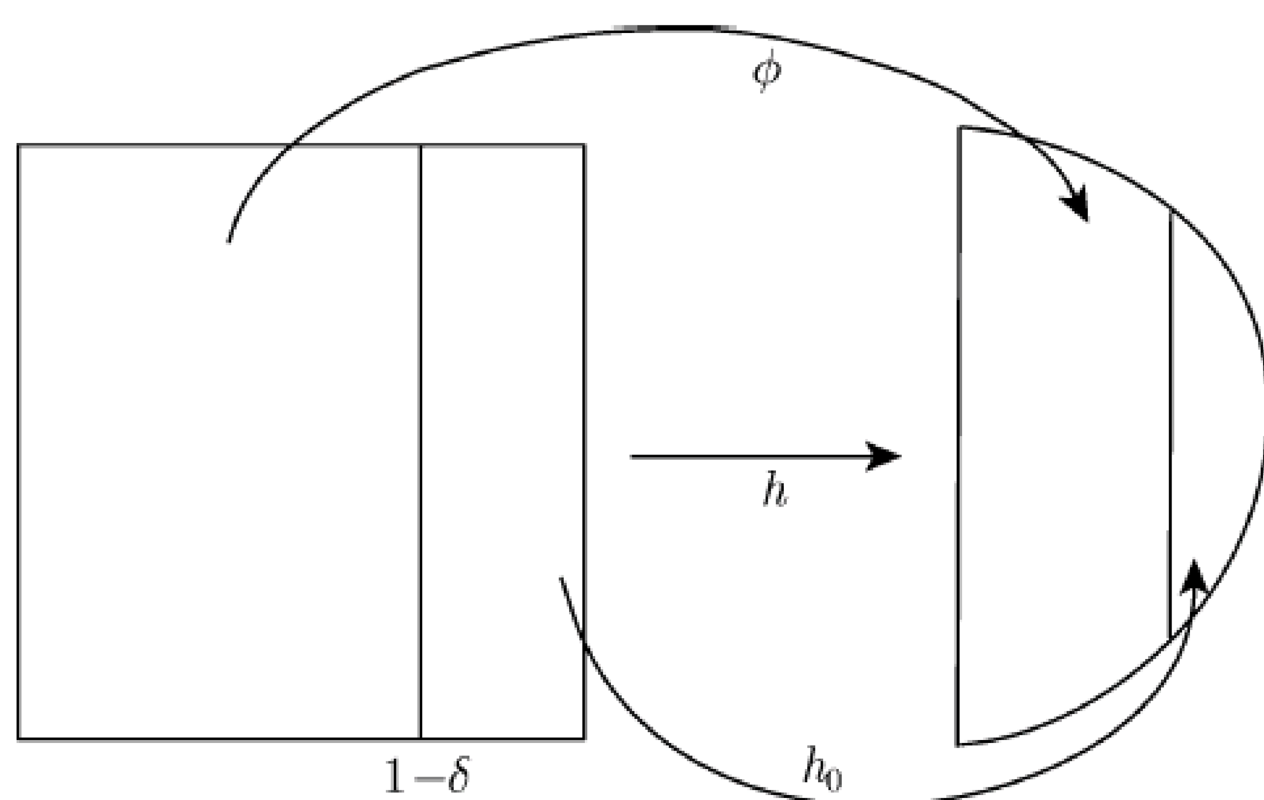


图 4-11 h 的定义

那么, $h = h_0 \cup \phi|[0,1-\delta]\times \mathbf{J} : \mathbf{I}\times \mathbf{J} \to \mathbf{B}_r^2$ 是同胚且

$$d(h,\phi) < \varepsilon.$$

我们证明了 $\phi : \mathbf{I}\times \mathbf{J} \to \mathbf{B}_r^2$ 是近似同胚. 式（4-6-2）是显然的. 证毕.

利用这些引理可以得到下面的结果.

引理 4.6.5 对任意的 $n \in ¥$, $\Phi_n : \mathbf{J}^n \to \mathbf{B}^n$ 是近似同胚.

证明 利用引理 4.6.2, 我们仅仅需要证明对任意的 $n \in ¥$, Ψ_n : $\mathbf{B}^n \times \mathbf{J} \to \mathbf{B}^{n+1}$ 是近似同胚. 我们已经证明了 $\Psi_n : \mathbf{B}^n \times \mathbf{J} \to \mathbf{B}^{n+1}$ 是满射. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 选择同胚 $h : \mathbf{I}\times \mathbf{J} \to \mathbf{B}_r^2$ 满足 $d(h,\phi) < \varepsilon$. 定义 $H : \mathbf{B}^n \times \mathbf{J} \to \mathbf{B}^{n+1}$ 为

$$H(x,t) = (h(\|x\|,t)_1 x^0, h(\|x\|,t)_2).$$

如图 4-12 所示.

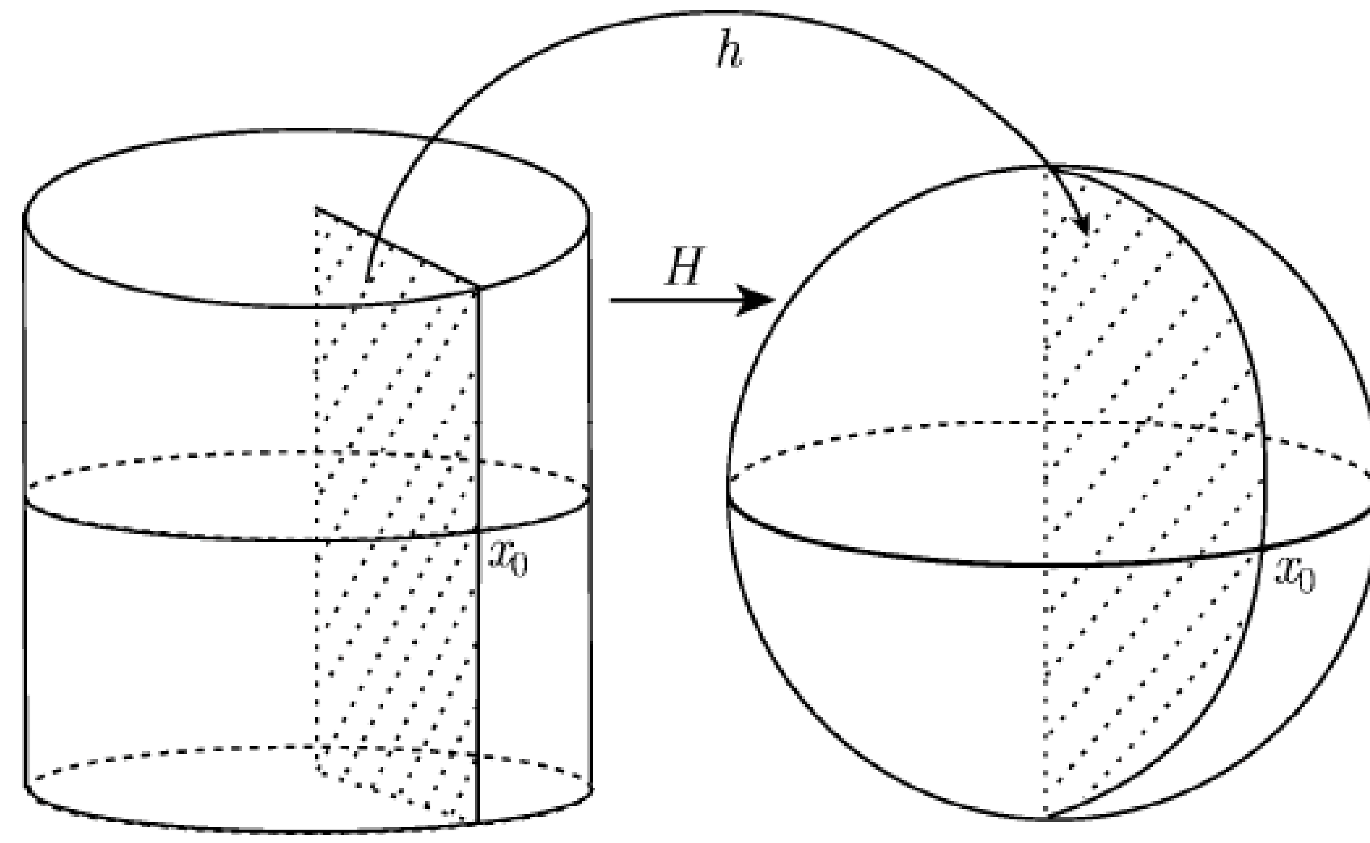


图 4-12 H 的定义

那么 H 是同胚且由式（4-6-2）知

$$d(H,\Psi_n)<\varepsilon.$$

证毕.

利用上面的引理和定理 4.6.1、定理 4.4.2, 我们能证明下面的定理.

定理 4.6.2 $\Phi_\infty:Q\to K$ 是近似同胚.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$, 我们证明存在 $H\in H(Q)$ 满足下面的（i）和（ii）.

（i）对任意的 $y\in K$, $\operatorname{diam} H(\Phi_\infty^{-1}(y))<\varepsilon$;

（ii）$d(\Phi_\infty,\Phi_\infty\circ H)<\varepsilon$.

由 Bing 收缩准则（定理 4.1.3）可说明 Φ_∞ 是近似同胚.

选择 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}2^{-i}<\frac{\varepsilon}{6}. \tag{4-6-3}$$

对此 n, 由定理 4.6.1 和引理 4.6.5, 存在同胚 $h\in H(\mathbf{J}^n)$ 使得:

（iii）对任意的 $y\in\mathbf{B}^n$, $\operatorname{diam}h(\Phi_n^{-1}(y))<\dfrac{\varepsilon}{3}$;

（iv）$d(\Phi_n,\Phi_n\circ h)<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

定义 $H\in H(Q)$为

$$H(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots)=(y_1,\cdots,y_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots),$$

这里 $(y_1,\cdots,y_n)=h(x_1,\cdots,x_n)$. 那么,

$$H\circ j_n=j_n\circ h. \tag{4-6-4}$$

下面我们仅仅需要证明 H 满足下面的（i）和（ii）即可.

为证明（i）, 假设 $y=(y_1,\cdots,y_n,y_{n+1},y_{n+2},\cdots)\in K, a=(a_1,\cdots,a_n,a_{n+1},a_{n+2},\cdots)$, $b=(b_1,\cdots,b_n,b_{n+1},b_{n+2},\cdots)\in Q$, 使得 $\Phi_\infty(a)=\Phi_\infty(b)=y$. 令

$$y^0=(y_1,\cdots,y_n),\ a^0=(a_1,\cdots,a_n),\ b^0=(b_1,\cdots,b_n).$$

那么, $y^0\in\mathbf{J}^n, a^0,b^0\in\mathbf{B}^n$ 且由引理 4.6.1 中最后一个结论知, $\Phi_n(a^0)=\Phi_n(b^0)=y^0$. 所以, 由（iii）知

$$d(h(a^0),h(b^0))<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4-6-5}$$

又, 因为 a,b 的前 n 个坐标分别和 $j_n(a^0),j_n(b^0)$ 的前 n 个坐标相同, 由 H 的定义知它们在 H 下的像也有相同的性质. 因此, 由式（4-6-5）知

$$d(H(a),H(j_n(a^0)))<\frac{\varepsilon}{3},\quad d(H(b),H(j_n(b^0)))<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 由 j_n 是等距映射和式（4-6-4）及（4-6-5）知

$$\begin{aligned}d(H(a),H(b))&\leqslant d(H(a),H(j_n(a^0)))+d(H(j_n(a^0)),H(j_n(b^0)))+d(H(j_n(b^0)),H(b))\\&<\frac{\varepsilon}{3}+d(j_n(h(a^0)),j_n(h(b^0)))+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+d(h(a^0),h(b^0))+\frac{\varepsilon}{3}\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

我们证明了（i）.

为证明（ii）, 假设 $x=(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots)\in Q$, 像上面一样, 我们令 $x^0=(x_1,\cdots,x_n)$. 那么, 由引理 4.6.1、H 的定义和式（4-6-3）知

$$d(\Phi_\infty(x),\Phi_\infty(j_n(x^0)))<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$d(\Phi_\infty\circ H(x),\Phi_\infty\circ H(j_n(x^0)))<\frac{\varepsilon}{3},$$



$$\Phi_\infty(j_n(x^0)) = j_n(\Phi_n(x^0)),\ \ \Phi_\infty \circ H(j_n(x^0)) = j_n(\Phi_n(h(x^0))).$$

所以，由（iv）和 j_n 是等距映射知

$$\begin{aligned}
& d\left(\Phi_\infty(x), \Phi_\infty \circ H(x)\right) \\
\leqslant\ & d(\Phi_\infty(x), \Phi_\infty(j_n(x^0))) + d(\Phi_\infty(j_n(x^0)), \Phi_\infty \circ H(j_n(x^0))) \\
& + d(\Phi_\infty \circ H(j_n(x^0)), \Phi_\infty \circ H(x)) \\
<\ & \frac{\varepsilon}{3} + d(j_n(\Phi_n(x^0)), j_n(\Phi_n \circ h(x^0))) + \frac{\varepsilon}{3} \\
\leqslant\ & \frac{\varepsilon}{3} + d(\Phi_n(x^0), \Phi_n \circ h(x^0)) + \frac{\varepsilon}{3} \\
<\ & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，（ii）成立. 证毕.

推论 4.6.1 $K \approx Q$.

至此，我们的第一个目标已经达到. 我们的第二个目标是给出 K 中一个同胚于 ℓ^2 的子空间 l. 事实上，

$$l = \left\{(x_n) \in K : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1\right\} \Big\backslash \{(-1, 0, 0, \cdots)\}.$$

引理 4.6.6 $l \approx \ell^2$.

证明 显然，l 是 ℓ^2 的子集. 进一步，由定理 2.6.12，l 作为 K 的子空间和作为 ℓ^2 的子空间有相同的拓扑. 而作为 ℓ^2 的子空间，下面定义的映射 h 建立了 l 到 ℓ^2 的子空间

$$\ell_0^2 = \{(x_n) \in \ell^2 : x_1 = 0\}$$

之间的同胚：

$$h(x_1, x_2, \cdots) = \begin{cases} (0, x_2, x_3, \cdots) & \text{如果} x_1 \geqslant 0, \\ \dfrac{(0, x_2, x_3, \cdots)}{\|(0, x_2, x_3, \cdots)\|^2} & \text{如果} x_1 \leqslant 0. \end{cases}$$

如图 4-13 所示.

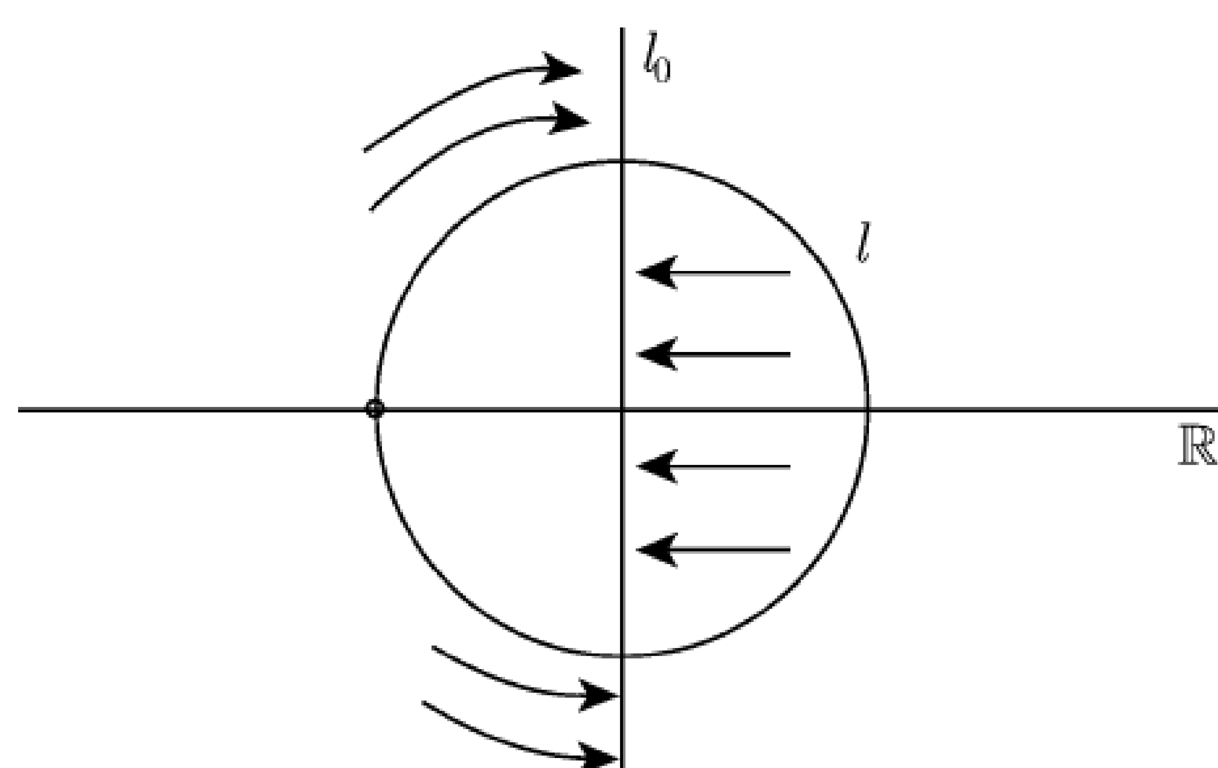


图 4-13 h 的定义

由于 $(x_1,x_2,\mathrm{L})\ \mathrm{a}\ \ (0,x_1,x_2,\mathrm{L})$ 显然是l^2到l_0^2之间的同胚, 因此,

$$l\approx \mathrm{l}_0^2\approx \mathrm{l}^2.$$

证毕.

我们的第三个目标是证明 $K\setminus l$ 是 K 的吸收子. 为此, 对任意的 $\varepsilon\in[0,1)$, 令

$$K(\varepsilon)=\left\{(x_n)\in K:\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2\leqslant 1-\varepsilon\right\}.$$

那么, $K=K(0)$.

引理 4.6.7 对任意的 $\varepsilon,\delta\in[0,1)$, $K(\varepsilon)\approx K\approx Q$, 且, 如果 $\delta<\varepsilon$, 那么 $K(\varepsilon)\in\mathcal{Z}(K(\delta))$.

证明 显然,

$$\phi_{\varepsilon}(x)=\sqrt{1-\varepsilon}x \tag{4-6-6}$$

建立了 K 与 $K(\varepsilon)$之间的同胚, 因此, 第一个结论成立.

为证明第二个结论, 不妨设 $\delta=0$. 对任意的的 $\eta>0$, 选择 n 充分大使得

$$\sum_{i=n-1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\eta. \tag{4-6-7}$$

定义 $f:K\to K$ 为



$$f(x_1,x_2,\cdots)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},\sqrt{\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)},0,0,\cdots\right).$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2+\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2+1-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2=1,$$

所以 $f:K\to K$ 是连续的. 又,

$$\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2+\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)=1-\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2}>1-\varepsilon.$$

因此, $f(K)\subset K\setminus K(\varepsilon)$. 由于对任意的 $x\in K$, $f(x)$ 和 x 的前 $n-1$ 个坐标是相同的, 所以, 由公式 (4-6-7) 知, $d(f,\mathrm{id}_K)<\eta$. 由定理 4.2.3 (1) 知 $K(\varepsilon)\in\mathcal{Z}(K)$. 证毕.

注意到, 作为一个从 K 到自身的连续映射, 容易验证, 由公式 (4-6-6) 定义的同胚 ϕ_ε 满足:

$$d(\phi_\varepsilon,\mathrm{id}_K)<\varepsilon. \tag{4-6-8}$$

现在, 我们能证明下面的定理.

定理 4.6.3 $\bigcup_{n=2}^{\infty}K\left(\frac{1}{n}\right)$ 是 K 的吸收子.

证明 由引理 4.6.7 知 $\left\{K\left(\frac{1}{n}\right):n=2,3,\cdots\right\}$ 是 K 的一列单调递增的 Z-集列. 我们证明其并为 K 的骨架子, 从而由定理 4.5.1 知本定理的结论成立. 我们仅仅需要验证 $\left\{K\left(\frac{1}{n}\right):n=2,3,\cdots\right\}$ 满足定义 4.5.1 (2) 中的条件 (i) 和 (ii) 即可. 为此, 设 $n\geqslant 2$, $\varepsilon>0$, $Z\in\mathcal{Z}(K)$. 由推论 4.6.1 和定理 4.4.3, 存在 $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon)$ 使得对于 K 中任何两个 Z-集之间的和单位映射的距离小于 ε_1 的同胚都可以扩张为 K 到自身的和单位映射的距离小于 ε 的同胚. 再次应用推论 4.6.1 和定理 4.4.3, 存在 $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ 使得对于 K 中任何两个 Z-集之间的和单位映射的距离小于 ε_2 的同胚都可以扩张为 K 到自身的和单位映

射的距离小于$\frac{\varepsilon_1}{2}$的同胚. 选择$m>n$使得$\frac{1}{m}<\min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2},\varepsilon_2\right\}$. 最后, 我们按下面的方法定义同胚$h:K\to K$使得其满足定义 4.5.1（2）中的条件（i）至（iii）.

我们先做一个预处理. 由引理 4.6.7, $K\left(\frac{1}{n}\right)\in\mathcal{Z}\left(K\left(\frac{1}{m}\right)\right)$. 所以, 对于由公式（4-6-2）定义的同胚$\phi_{1/m}$, 我们有

$$(\phi_{1/m})^{-1}\left(K\left(\frac{1}{n}\right)\right)\in\mathcal{Z}(K),$$

而且

$$\xi=(\phi_{1/m})^{-1}\Big|K\left(\frac{1}{n}\right):K\left(\frac{1}{n}\right)\to(\phi_{1/m})^{-1}\left(K\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

是K中两个Z-集之间的同胚. 由公式（4-5-1）知

$$d(\xi,\mathrm{id}_K)\leqslant d\left((\phi_{1/m})^{-1},\mathrm{id}_K\right)=d\left(\phi_{1/m},\mathrm{id}_K\right)\leqslant\frac{1}{m}<\varepsilon_2.$$

因此, 由ε_2的选择知存在同胚扩张$f:K\to K$使得$d(f,\mathrm{id}_K)<\frac{\varepsilon_1}{2}$. 至此, 我们完成了预处理.

现在考虑同胚$\phi_{1/m}\circ f:K\to K\left(\frac{1}{m}\right)$在$Z$-集$K\left(\frac{1}{n}\right)\cup Z$上的限制$\eta=\phi_{1/m}\circ f\Big|K\left(\frac{1}{n}\right)\cup Z$. 那么

$$d(\eta,\mathrm{id}_K)<\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{1}{m}<\varepsilon_1,$$

$$\eta\Big|K\left(\frac{1}{n}\right)=\mathrm{id}_{K\left(\frac{1}{n}\right)},\quad \eta(Z)\subset K\left(\frac{1}{m}\right).$$

所以, η是K的两个Z-集之间的小于ε_1的同胚, 因此, 可以扩张为K到自身的同胚$h:K\to K$使得$d(h,\mathrm{id}_K)<\varepsilon$, 则$h$和$m$满足我们的要求. 这个证明的思路如图 4-14 所示.

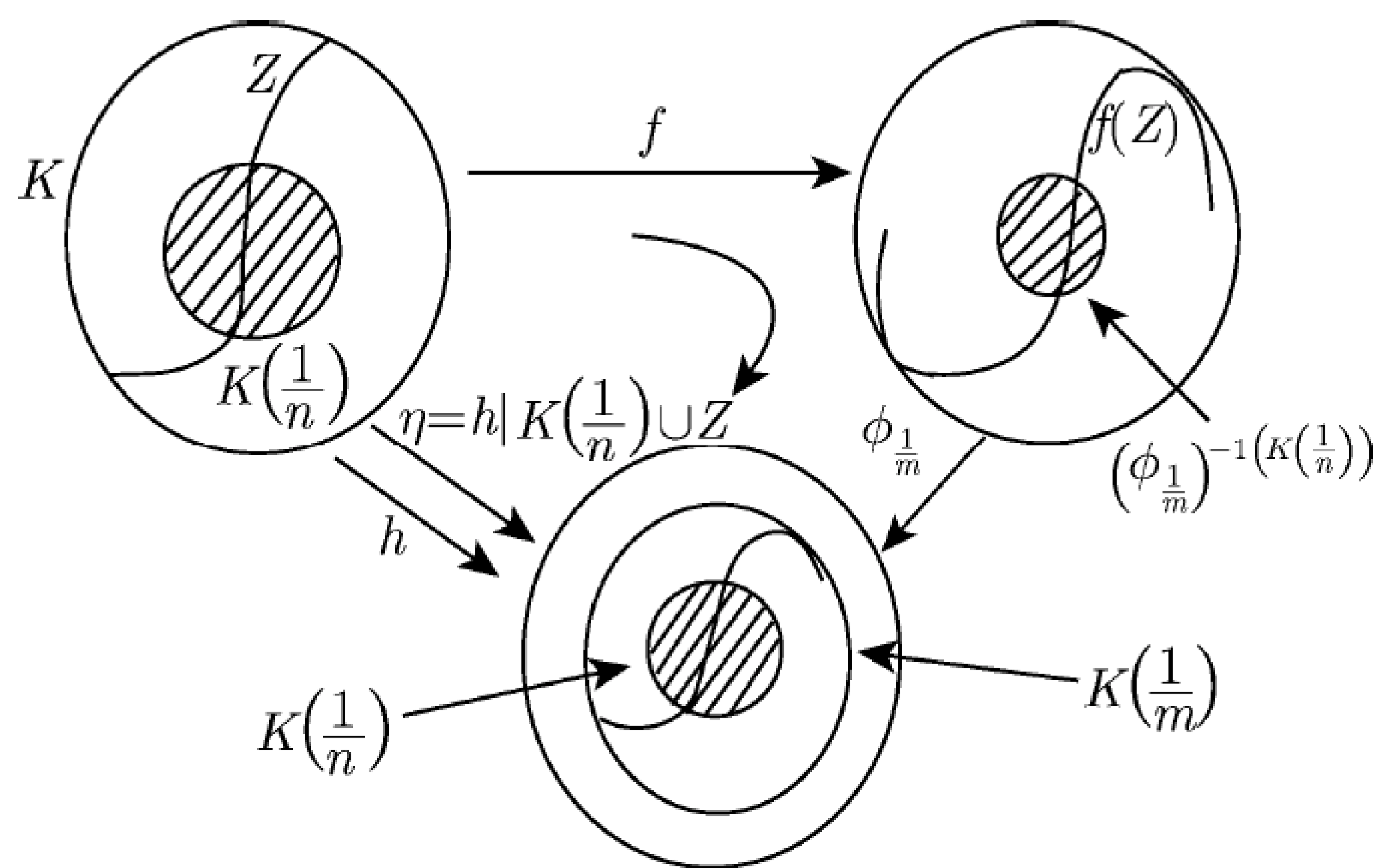


图 4-14 定理 4.6.3 的证明思路

推论 4.6.2 $l \approx s$.

证明 由上面的定理和定理 4.5.2（2）知，$K \setminus l = \{(-1,0,0,L)\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} K\left(\frac{1}{n}\right)$ 是 $K \approx Q$ 的吸收子，因此，

$$(K, K \setminus l) \approx (Q, B(Q)).$$

所以，$l \approx s$. 证毕.

现在，我们能证明 Anderson 定理.

定理 4.6.1 的证明 由引理 4.6.6 和推论 4.6.2 知

$$1^{2} \approx l \approx s \approx ?^{¥} .$$

证毕.

练 习 4.6

4.6.A. 证明 $1^{2} \approx 1^{2} \times [0,1) \approx 1^{2} \times [0,1] \approx 1^{2} \times Q$.

4.6.B. 证明 $\triangle(1^{2}) \approx 1^{2}$.

参考文献

[1] Beer G. Topologies on closed and closed convex sets. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1993.

[2] 北京大学数学系几何与代数前代数小组编. 王萼芳, 石生明修订. 高等代数. 3版. 北京：高等教育出版社, 2003.

[3] Cauty R. Un espace métrique linéair qui n'est pas un rétracte absolu. Fund. Math., 146(1994), 85-99.

[4] Engelking R. General topology. Berlin: Heldermann Berlag, 1989.

[5] Engelking R. Theory of dimensions, finite and infinite. Berlin: Heldermann Berlag, 1995.

[6] Curtis D W, Schori R M. Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cube. Fundamenta Mathematicae, 1978, 101: 19-38.

[7] Falconer K. 分形几何. 曾文曲, 译. 北京：人民邮电出版社, 2007.

[8] Jech T. Set theory. New York: Academic Press, 1978.

[9] Kelley J L. General topology. New York: van Nostrand, 1955. (中译本：吴从炘, 吴让泉译. 一般拓扑学. 北京：科学出版社, 1982.)

[10] Kuratowski K, Mostowski A. Set theory, with an introduction to descriptive set the-ory. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1976.

[11] Van Mill J. Infinite-dimensional topology, prerequisites and introduction. Amsterdam: North-Holland, 1989.

[12] Van Mill J. The infinite-dimensional topology of function spaces. North-Holland Mathematical Library 64, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2001.

[13] Munkres J R. Topology. second edition. 北京：机械工业出版社,

2006.（中译本：熊金城，吕杰，谭枫译. 拓扑学. 2版. 北京：机械工业出版社，2006.）

[14] Munkres J R. Elements of algebraic topology. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[15] Rudin W. Functional analysis. second edition. McGraw-Hill, 1991.

[16] Sakai K. Geometric aspects of general topology. Berlin: Springer, 2013.

[17] 熊金城. 点集拓扑讲义. 3版. 北京：高等教育出版社，2003.

[18] 杨忠强. Alexander 子基引理的一个简单证明. 陕西师范大学学报：自然科学版，1998, 26(2): 103-104.

[19] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义. 北京：北京大学出版社，1987.

[20] 张锦文. 公理集合论导引. 北京：科学出版社，1999.

[21] 杨忠强，杨寒彪. 度量空间的拓扑学. 北京：科学出版社，2017.